



Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr
```

On considère les fonctions f et g définies sous condition de convergence par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \qquad g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+ .
2. Que donne l'outil informatique pour le calcul de $f(0)$, $f(1)$ et $f(10)$?

Commenter.

3. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_A : x \mapsto \int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

- a. Écrire une fonction Python de paramètres A et x qui calcule $f_A(x)$.
- b. Tracer simultanément les courbes représentatives de f_{50} , f_{100} , f_{200} et f_{500} sur l'intervalle $[0, 5]$.

Commenter

4. Montrer que la fonction g est définie et continue sur \mathbb{R}_+ et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
5. Tracer simultanément les courbes représentatives de g et f_{200} .

Que peut-on conjecturer ?

6. Après avoir changé son expression à l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
7. Donner une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f et g .

Conclure.