

MATHÉMATIQUES I

Définitions et notations

On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues dans l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles.

Pour f et g éléments de E , on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \cdot \|$ (on rappelle que $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$) et munit E d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (\Phi_m | \Phi_n) = \delta_{m, n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Soit Φ une suite orthonormale de E .

1) Si $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_Φ^n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{\Phi_j | 0 \leq j \leq n\}$, par \prod_Φ^n l'opérateur de projection orthogonale de E sur V_Φ^n et enfin par $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ à V_Φ^n .

2) On désigne par V_Φ le sous-espace vectoriel de E réunion des V_Φ^n

$$V_\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_\Phi^n ;$$

par définition V_Φ est égal à l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme

$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \Phi_{j_i}$, où j_1, j_2, \dots, j_p sont des entiers distincts et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des coefficients réels.

3) On dit que la suite orthonormale Φ est totale dans E si pour tout élément f de E il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V_Φ convergeant vers f .

Filière PSI

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2} \cos(n\pi x) & \text{si } n > 0 \end{cases} ; \quad S_n(x) = \sqrt{2} \sin((n+1)\pi x)$$

et on note $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La partie IV est largement indépendante des trois parties précédentes.

Partie I - Généralités sur les suites orthonormales

I.A - Montrer que C et S sont des suites orthonormales de E .

I.B - Soit Φ une suite orthonormale de E , $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

I.B.1) Établir la formule $\|f\|^2 = \left\| \prod_{\Phi}^n(f) \right\|^2 + [d_{\Phi}^n(f)]^2$.

I.B.2) Calculer

$$\sup_{\|f\|=1} \left\| \prod_{\Phi}^n(f) \right\|$$

I.B.3) Expliciter $\prod_{\Phi}^n(f)$ dans la base $\{\Phi_j \mid 0 \leq j \leq n\}$.

En déduire que la série de terme général $(f|\Phi_k)^2$ est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (f|\Phi_k)^2 \leq \|f\|^2$$

I.C - On suppose toujours que Φ est une suite orthonormale de E .

I.C.1) Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_{Φ} , convergeant dans E et soit $f = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k)$.

a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq N \Rightarrow \left\{ f - \prod_{\Phi}^n(f) = f - f_k + \prod_{\Phi}^n(f_k - f) \right\}$$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^n (f) - f \right\| = 0$.

I.C.2) Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) Φ est totale dans E .

ii) $\forall f \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^n (f) - f \right\| = 0$.

I.C.3) **On suppose de plus dans cette question seulement** que Φ est totale dans E .

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ expliciter $\|f\|^2$ et $[d_{\Phi}^n(f)]^2$ à l'aide des $(f|_{\Phi_k})$.

I.D - Étude de la suite C .

I.D.1) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue paire périodique et de période 2 notée \tilde{f} telle que sa restriction à $[0,1]$ soit égale à f .

I.D.2) Montrer alors que la suite C définie dans le préambule est totale dans E . On pourra introduire les coefficient de Fourier de la fonction 2π -périodique h définie par $h(x) = \tilde{f}\left(\frac{x}{\pi}\right)$, la fonction \tilde{f} étant celle de la question précédente.

I.D.3) Exhiber une suite orthonormale de E non totale dans E .

Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note I un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. Une fonction f définie dans I et à valeurs réelles est dite lipschitzienne dans I si elle vérifie la condition :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, (\forall (x,y) \in I^2), |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

On notera $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes dans I .

II.A - Propriétés élémentaires.

II.A.1) Vérifier que $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I, \mathbb{R})$.

Le produit de deux éléments de $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$? si $f \in \text{Lip}(I, \mathbb{R})$ justifier l'existence du réel $k(f)$ défini par

$$k(f) = \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \mid (x,y) \in I^2, x \neq y \right\}$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f .

II.A.2) Si I est un intervalle compact de \mathbb{R} , vérifier que $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $C^0(I, \mathbb{R})$. Exhiber une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

II.B - Soit f une fonction de classe C^1 sur I .

Montrer que f' est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I .

Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz à l'aide de f' .

II.C - Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f . On suppose de plus que l'ensemble des $\{k(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Montrer que $f \in \text{Lip}(I, \mathbb{R})$.

II.D - Soit $g \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $k(g) \leq 1$.

II.D.1) Montrer qu'il existe $\widehat{g} \in \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$k(\widehat{g}) \leq 1 \text{ et } \forall x \in [0, 1] \quad \widehat{g}(x) = g(x)$$

II.D.2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $g_n(x) = n \int_x^{x + \frac{1}{n}} \widehat{g}(t) dt$.

Montrer que g_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} à dérivée bornée par 1.

Montrer que la suite g_n converge uniformément sur \mathbb{R} vers \widehat{g} .

II.E - Dans les deux dernières questions de cette partie les suites S et C sont celles définies dans le préambule.

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

II.E.1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $(f|C_n)$ en fonction de $(f|S_{n-1})$.

II.E.2) Montrer que la série de terme général $n^2 (f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (f|C_n)^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2$$

II.F - Soit $f \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R})$.

II.F.1) Montrer que la série de terme général $n^2 (f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (f|C_n)^2 \leq \frac{1}{2} k(f)^2$$

II.F.2) En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_c^{n-1}(f) \leq \frac{1}{n\pi} k(f)$.

Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale

L'objectif est de montrer que la suite des constantes de Lipschitz des éléments d'une suite orthonormale de E est toujours minorée par une suite de la forme $(\Gamma n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Γ est une constante positive indépendante de la suite choisie dans E .

III.A - Soient $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites orthonormales de E .

Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n + \sum_{j=0}^m d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq m + 1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{2n-1} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n$$

III.B - On donne maintenant une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale de E .

On suppose de plus que toutes les fonctions Φ_n sont lipschitziennes dans $[0,1]$.

III.B.1) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \geq \pi^2 n^3$$

III.B.2) Montrer que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ est non bornée.

III.B.3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k(\Psi_n) = +\infty$.

III.B.4) Trouver la valeur de $k(C_n)$.

III.B.5) Montrer qu'il existe un réel $\Gamma > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite orthonormale $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ telle que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ soit une suite croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, k(\Psi_n) \geq \Gamma n$$

Ce résultat est dû à W. Rudin (1952).

Partie IV - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre

Le but de cette dernière partie est le calcul des constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale d'éléments de E constituée de polynômes.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n, \quad P_n = U_n^{(n)}, \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n$$

La notation $f^{(n)}$ représente la dérivée n -ième de la fonction f .

On démontre, et on admettra, que l'on a :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

IV.A - Montrer qu'il existe une unique suite de réels tous strictement positifs notée $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $Q = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \alpha_n L_n(2x - 1)$$

est une suite orthonormale de E .

Donner la valeur de α_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, la notation Q_n désigne l'élément ainsi calculé.

IV.B -

IV.B.1) Soit $f \in E$ donné. Montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

IV.B.2) Montrer que la suite Q définie ci-dessus est totale dans E .

Pour cela on pourra montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ en appliquant le théorème de Weierstrass à la fonction $f \in E$ donnée.

IV.B.3) Déterminer toutes les suites orthonormales $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E possédant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n$$

IV.C - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = n! \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

IV.D - Soient $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

La lettre θ désigne une variable réelle.

IV.D.1) Démontrer que si $|x| \leq 1$ alors $L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta$.

On pourra remarquer que

$$x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta = \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{i\theta} \right) \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{-i\theta} \right)$$

IV.D.2) Établir que

$$\max_{x \in [-1, +1]} |L_n(x)| = 1$$

Quelles sont les valeurs de $x \in [-1, +1]$ telles que $|L_n(x)| = 1$?

IV.E -

IV.E.1) En remarquant que $(x^2 - 1)U'_n(x) = 2nxU_n(x)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x^2)P'_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

IV.E.2) Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x)$$

IV.F - Calculer enfin la valeur $k(Q_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

••• FIN •••
