

SCIENTES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR I

COMPACTEUR

Le compacteur étudié (Caterpillar, modèle 214D) est présenté sur les figures 1a et 1b avec ses caractéristiques externes principales. Ce compacteur vibrant est destiné aux petits travaux de compactage. Pour ce type d'engin, le compactage résulte plus des chocs à fréquence élevée qu'exerce chaque cylindre sur le sol plutôt que de la masse du compacteur. Le schéma cinématique du compacteur est donné sur la figure 2.

Le cylindre (avant ou arrière) est porté par deux supports de cylindre (gauche et droit) par l'intermédiaire de plots élastiques qui permettent de petits déplacements radiaux associés aux vibrations de ce cylindre. Chaque support de cylindre est en liaison pivot d'axe horizontal avec un demi-bâti (avant ou arrière). Les vibrations sont obtenues par le mouvement de rotation à vitesse rapide ($3600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$) d'un arbre nommé arbre-balourd constitué d'un arbre équilibré sur lequel est placée une masse excentrée (masse « balourd »). La mise en rotation de l'arbre-balourd est effectuée par le moteur hydraulique de vibration par l'intermédiaire d'une transmission à double joint de Cardan. Un solide intermédiaire, cloche de vibration, en liaison encastrement avec le cylindre, assure le guidage en rotation de l'arbre-balourd. La masse « balourd » se trouve dans le plan médian vertical du cylindre (avant ou arrière).

L'avancement du compacteur est obtenu par la mise en rotation d'un des deux supports de cylindre (support gauche pour l'avant et support droit pour l'arrière) par le moteur hydraulique d'avancement.

Construction du sujet :

- la partie I : est consacrée à l'avancement de ce compacteur (mise en rotation des cylindres par l'intermédiaire de deux moteurs hydrauliques) ;

Filière TSI

- la partie II : traite du problème d'orientation des deux demi-bâti (et donc des cylindres) lorsque le compacteur se déplace en courbe ;
- la partie III : est dédiée à l'étude de la solution technologique permettant la vibration de chaque cylindre ;
- la partie IV : étudie le guidage en rotation de l'arbre recevant le balourd ;
- la partie V : propose l'étude d'une autre solution constructive permettant d'obtenir une direction de vibration fixe.

I - Étude des solutions technologiques associées à la fonction « faire tourner les cylindres »

Chaque chaîne fonctionnelle d'avancement utilise un moteur hydraulique lent dont les caractéristiques principales sont :

- moteur à pistons radiaux Poclairn Hydraulics : $MK04-2-11$,
- cylindrée (volume théorique aspiré (engendré par les pistons) par tour d'arbre) : $C_y = 408 \text{ cm}^3$,
- vitesse maxi : $N_{\text{Maxi}} = 100 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$,
- puissance sur l'arbre de sortie : $P = 18 \text{ kW}$.

Pour les questions I.A à I.F, les conditions d'utilisation du compacteur sont :

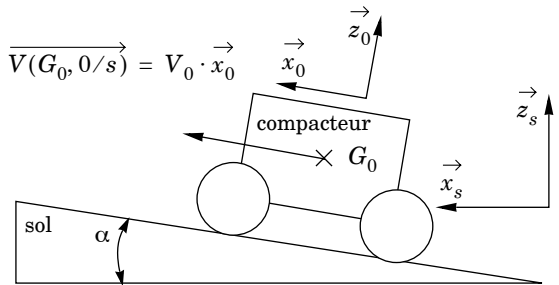
- vitesse, au centre de gravité G_0 , du compacteur 0, par rapport au sol s : $\vec{V}(G_0, 0/s) = V_0 \cdot x_0$; $V_0 = \text{constante} = 4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,
- pente de la chaussée à compacter : 7 % ,
- accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,
- moteurs de vibration à l'arrêt,
- roulement sans glissement des cylindres sur le sol.

Hypothèses :

- pour cette faible pente, on supposera que les deux cylindres sont chargés de manière identique,

- la résistance à l'avancement lors du compactage est modélisée par un glisseur, de résultante \vec{R}_a , exercé par le sol sur chaque cylindre au milieu du contact sol-cylindre et tel que : $\vec{R}_a = R_a \cdot \vec{x}_0$, avec $R_a = -875 \text{ N}$,
- $\tan(\alpha) = 0,07$.

I.A - Calculer la vitesse angulaire ω_m , de l'arbre d'un des moteurs hydrauliques d'avancement par rapport au bâti. Cet arbre est en liaison encastrement avec le support de cylindre. Le rendement volumétrique du moteur η_v , est défini par :



$$\eta_v = \frac{\text{débit théorique engendré par les pistons}}{\text{débit d'entrée}} = \frac{C_y \cdot \omega_m}{\frac{2 \cdot \pi}{Q_{v_e}}} = 0,97 ; Q_{v_e} \text{ étant le débit}$$

volumétrique à l'entrée du moteur.

Calculer Q_{v_e} .

I.B - Pour cette phase de compactage d'un sol avec une pente de 7 %, calculer la puissance P_m nécessaire au niveau de l'arbre de **chaque** moteur d'avancement. Préciser le système isolé ainsi que les théorèmes généraux de la mécanique utilisés. On supposera que les liaisons, à l'intérieur du compacteur, sont parfaites.

Afin d'exploiter l'abaque donné figure 3, on effectue un premier calcul de la pression du circuit hydraulique d'alimentation du moteur p_{h_e} , en considérant un rendement global du moteur égal à 1.

On donne la relation qui permet d'exprimer la puissance hydraulique à l'entrée du moteur : $P_e = Q_{v_e} \cdot \Delta p_h$ où Q_{v_e} est le débit volumétrique à l'entrée du moteur et Δp_h l'écart de pression entre l'entrée et la sortie. La pression à la sortie p_{h_s} est nommée pression de gavage. Cette pression est estimée à 5 bar (1 bar = $1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$). $\Delta p_h = p_{h_e} - p_{h_s}$. On utilisera les valeurs suivantes pour les questions I.C à I.F : $P_m = 2 \cdot 10^3 \text{ W}$ et $Q_{v_e} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

I.C - Calculer la pression à l'entrée du moteur : p_{h_e} .

I.D - Déterminer, à partir de l'abaque de la figure 3, le rendement global η_g (ou total) du moteur.

I.E - En déduire la valeur réelle de la puissance d'entrée P_e du moteur.

I.F - En adoptant un rendement global $\eta_{gp} = 0,93$ pour la pompe hydraulique qui alimente les deux moteurs d'avancement, déterminer la puissance mécanique nécessaire à l'entrée de cette pompe. Comparer cette valeur à celle fournie par le moteur thermique (figure 1b).

II - Étude des solutions technologiques associées à la fonction « orienter les cylindres »

La figure 4 représente l'implantation du vérin hydraulique permettant l'orientation du demi-bâti avant par rapport au demi-bâti arrière.

On note $\phi = (\vec{x}_{0_{ar}}, \vec{x}_{0_{av}})$ (voir aussi figure 2), l'angle d'orientation entre le demi-bâti avant et le demi-bâti arrière (donc entre l'axe du cylindre avant et l'axe du cylindre arrière).

II.A - L'angle ϕ doit être compris entre -32° et $+32^\circ$. Calculer la course, c , nécessaire du vérin.

On souhaite connaître le diamètre du vérin. Pour cela on se place dans le cas où les moteurs d'avance et de vibration sont à l'arrêt, le compacteur étant sur un sol **horizontal**, frein désactivé. Le torseur représentant les efforts exercés par le sol sur le cylindre avant en A, milieu du contact cylindre-sol, au cours du mouvement d'orientation du demi-bâti avant par rapport au demi-bâti arrière est :

$$A\{T_{\text{sol/cylindre}}\}_{(\vec{x}_{0_{av}}, \vec{y}_{0_{av}}, \vec{z}_{0_{av}})} = A \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{M_t \cdot g}{2} & -\frac{\tan(\varphi) \cdot M_t \cdot g \cdot I}{8} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_{0_{av}}, \vec{y}_{0_{av}}, \vec{z}_{0_{av}})}$$

$\vec{z}_{0_{av}}$ est vertical et $\tan(\varphi)$, facteur de frottement de glissement au contact sol-cylindre vaut 0,3. La pression de contact entre le cylindre et le sol est supposée constante tout le long du contact.

II.B - Justifier, à l'aide d'un croquis, l'expression du représentant des actions du sol sur le cylindre, en supposant que le contact du cylindre sur le sol est tel que le glissement en A est nul.

II.C - Proposer une démarche d'isolement permettant le calcul de l'effort maximum nécessaire pour le vérin. Calculer cet effort maximum, en supposant qu'il est obtenu pour $\phi = -32^\circ$. Toutes les liaisons (sauf les liaisons des cylindres avec le sol) seront supposées parfaites.

II.D - Vérifier le choix correct de ce vérin, la pression d'alimentation étant de 40 bar et le vérin hydraulique choisi ayant un diamètre de piston $D_p = 63$ mm avec un diamètre de tige $D_t = 28$ mm .

III - Réalisation de la fonction « imposer le balourd »

Les dessins de définition de l'ensemble de l'arbre a , équipé du balourd b , cet ensemble étant nommé arbre-balourd, ainsi que celui du balourd sont donnés sur les figures 5a et 5b. Une modélisation (à utiliser pour les questions III.A à III.C) de l'arbre-balourd et du balourd est donnée figure 5c. Ces deux pièces sont en acier (masse volumique $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). L'arbre recevant le balourd est modélisé par un cylindre épaulé de diamètre $D_a = 45$ mm et de longueur $L_a = 232$ mm (son diamètre D_b vaut 55 mm sous le balourd). On note O_a , le centre d'inertie de cet arbre.

III.A - Déterminer la masse du balourd, masse notée m_b .

III.B - Calculer la position du centre d'inertie de ce balourd G_b .

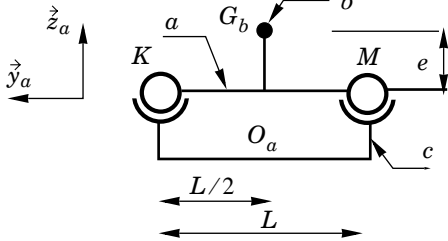
III.C - En utilisant les données de la figure 5c, proposer et justifier l'allure générale de la matrice d'inertie de l'ensemble arbre-balourd, en O_a et dans $B_a(x_a, y_a, z_a)$. Calculer le moment d'inertie B_{a+b} de cet ensemble autour de (O_a, y_a) .

On se place maintenant dans une phase d'essais du compacteur permettant de mesurer quelques performances. Pour cette phase d'essais, le bâti du compacteur est posé sur des cales, cylindres parallèles. Les moteurs d'avancement sont à l'arrêt. Ainsi, chaque support de cylindre est fixe par rapport au sol. Les cylindres ne touchent plus le sol et ne tournent pas. Seul le moteur de vibration fonctionne. Les cylindres vibrent et entraînent un désaxage de l'ensemble {cylindre ; arbre-balourd} par rapport à (O_0, y_0) . Ce désaxage faible dépend de la raideur des plots élastiques ($A < 1$ mm , figure 6).

Hypothèses :

- le centre d'inertie G_c du cylindre est supposé confondu avec le point O_a (figure 6 : paramétrage de l'arbre-balourd). Ce point G_c est sur l'axe du cylindre, à la verticale du point A (figure 4),
- les actions qu'exerce l'ensemble des deux supports (droite et gauche) sur le cylindre par l'intermédiaire des plots élastiques sont modélisées en O_a par un glisseur de résultante $\vec{R}_{\text{supports/cylindre}} = m_{c+a+b} \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0$ avec :
 - \vec{g} : accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,
 - m_{c+a+b} masse de l'ensemble {cylindre + arbre-balourd},
 $m_{c+a+b} = 400 \text{ kg}$,

- le **poïds** de l'arbre ainsi que celui du balourd sont négligés par rapport au **poïds** du cylindre,
- les actions du cylindre sur l'arbre-balourd sont modélisées par un glisseur en O_a de résultante notée $\vec{R}_{c/a}$,



- les actions de l'arbre du moteur de vibration sur l'arbre-balourd sont modélisées par un couple pur de moment $C_m = C_m \cdot y_a$.

Le mouvement du cylindre c , par rapport au bâti du compacteur 0 , est une translation circulaire de centre O_0 et de rayon A (figure 6).

III.D - Donner l'expression littérale

de $\vec{V}(O_a, c/0)$, vitesse du point O_a dans le mouvement du cylindre par rapport au bâti.

III.E - Écrire les équations vectorielles littérales issues de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au système isolé {arbre-balourd} (arbre + balourd) au point O_a en fonction de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ et des autres paramètres constants. Pour le calcul du moment dynamique seulement, on supposera que le point O_a est fixe par rapport au bâti.

On se place maintenant en régime permanent, c'est-à-dire que $\ddot{\theta} = 0$. Ceci implique $\ddot{\alpha} = 0$.

III.F - Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système isolé {cylindre seul} et exprimer la relation entre α et θ pour $\ddot{\theta} = 0$. En déduire la relation entre A et e .

III.G - Calculer A en utilisant $e = 49,7 \text{ mm}$ et $m_b = 3,5 \text{ kg}$.
 Pour la suite du problème on pose $A = 0,5 \text{ mm}$ et $\alpha = \theta + \pi$.

III.H - En déduire l'évolution de la direction de la résultante dynamique du système isolé {cylindre} et la trajectoire du point O_a dans le repère $R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$ lié au bâti du compacteur.

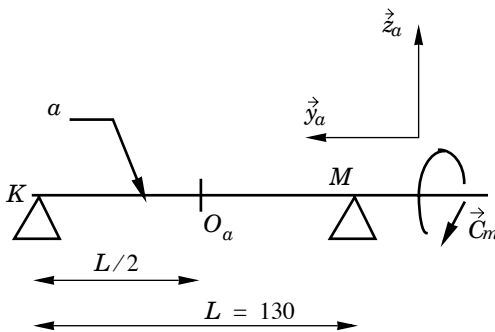
III.I - Calculer le couple de démarrage C_m nécessaire pour ce moteur de vibration, le temps d'accélération t_a imposé pour le démarrage du moteur de vibration étant égal à : $t_a = 0,5 \text{ s}$. On utilisera B_{a+b} moment d'inertie de l'ensemble arbre-balourd autour de (O_a, y_a) , $B_{a+b} = 1,63 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. En déduire la puissance, P_v nécessaire en sortie du moteur hydraulique de vibration.

IV - Réalisation de la fonction « guider l'arbre-balourd »

IV.A - Comportement dynamique de l'arbre-balourd

Le compacteur est toujours en phase d'essais (bâti du compacteur posé sur des cales). On se place en phase de démarrage du moteur de vibration. Le modèle de mécanique des structures retenu pour le comportement de l'arbre seul est le suivant : arbre cylindrique non épaulé de diamètre $d_a = 45$ mm, liaisons parfaites en K et M . Les actions du balourd sur l'arbre sont modélisées par :

$$O_a \{ T^{\text{balourd}} / \text{arbre} \}_{(x_a, y_a, z_a)} = O_a \left\{ F_r \cdot \vec{z}_a ; -C_m \cdot \vec{y}_a \right\}_{(x_a, y_a, z_a)}$$



IV.A.1) Tracer les diagrammes des moments de flexion et de torsion pour $F_r = 25 \cdot 10^3$ N et $C_m = 13$ Nm. En déduire l'expression puis la valeur de la contrainte normale maximale en flexion et de la contrainte tangentielle maximale en torsion. Quelle sollicitation est prédominante dans l'arbre ? Proposer, pour le seul critère de résistance relatif à cette sollicitation, une nuance d'acier pour l'arbre avec son

traitement éventuel.

Pour la déformation de l'arbre en flexion, l'expression de la pente de la tangente à la ligne moyenne en M est :

$$z'_M = \frac{F_r \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I_{G_x}}, \text{ le module d'élasticité longitudinal } E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa.}$$

IV.A.2) Calculer la pente de la tangente à la ligne moyenne au point M . En déduire quel type de roulement serait compatible avec cette déformation.

Le guidage en rotation de l'arbre-balourd est réalisé par deux roulements à rotule à deux rangées de rouleaux (roulements 22309 : $45 \times 100 \times 36$).

IV.A.3) Justifier le choix de ce type de roulement dans ce contexte.

IV.B - Conception du guidage en rotation de l'arbre-balourd et de son environnement

On souhaite, dans cette partie, réaliser le dessin de conception relatif au guidage en rotation de l'arbre-balourd et au respect de quelques fonctions techni-

ques. L'arbre-balourd est en liaison pivot avec la cloche de vibration constituée par un carter en deux parties symétriques assemblées. La cloche est en liaison encastrement avec le cylindre du compacteur. Le plan d'assemblage des deux demi-cloches de vibration correspond au plan médian vertical du cylindre.

La lubrification de cet ensemble est réalisée par ruissellement d'huile sur les parois intérieures de la cloche lorsque celle-ci est mise en rotation par le déplacement du compacteur. Il n'y a pas barbotage pour limiter les pertes de puissance pour le système de vibration (la masse « balourd » ne pénètre donc pas dans la réserve d'huile). La vérification du niveau et le remplissage se font par le même bouchon, le cylindre étant calé angulairement. Le dessin de l'ensemble arbre-balourd est donné à l'échelle 1 : 1 sur la figure 8. Ce dessin pourra être collé ou recopié partiellement pour la réponse à la question . Une proposition de mise en page est donnée sur cette même figure.

Réaliser, sur les deux pages intérieures d'une feuille de copie, le dessin d'ensemble, à l'échelle 1 : 1 montrant :

- le guidage en rotation de l'arbre-balourd. La liaison pivot de l'arbre avec la cloche de vibration est réalisée par deux roulements à rotule à deux rangées de rouleaux (roulements 22309 : alésage $d = \text{Ø}45 \text{ mm}$; bague extérieure $D = \text{Ø}100 \text{ mm}$; largeur $B = 36 \text{ mm}$). Préciser les ajustements.
- la définition de la cloche de vibration. Cette cloche en deux parties est réalisée à partir d'une préforme (ou brut) en fonte *GJL 300* obtenue par moulage au sable. Le dessin de la cloche pourra être limité à une demi-vue principale et des vues auxiliaires montrant :
 - les surfaces participant au guidage en rotation de l'arbre-balourd,
 - les zones d'assemblage des deux demi-cloches,
 - le bouchon de remplissage-niveau et le bouchon de vidange.

La liaison de la cloche avec le cylindre ne fait pas partie de cette étude.

- l'étanchéité statique et dynamique de la cloche par rapport à l'extérieur.

V - Étude d'une autre solution constructive pour la réalisation de la fonction « faire vibrer les cylindres »

Un autre constructeur propose une solution constructive du système de vibration. L'objectif est d'obtenir une direction fixe, réglable, pour les petits déplacements radiaux du cylindre par rapport au bâti. Pour cela, la masse « balourd » est remplacée par trois masses telles que deux masses tournent dans le même sens alors que l'autre tourne en sens inverse. La cloche de vibration devient indépendante du cylindre et son orientation est réglée grâce à un troisième moteur hydraulique. Le schéma cinématique fonctionnel de cette solution est

proposé sur la figure 7a. La disposition des pignons 5, 6₇ et 7 est donnée sur la figure 7b. La plage d'orientation de la résultante dynamique du système isolé {cylindre} est de 0° à 90° par rapport à la verticale.

Hypothèses de l'étude :

- on se place en phase d'essais, le compacteur posé sur des cales, les cylindres n'étant pas en contact avec le sol,
- les moteurs d'avancement sont à l'arrêt,
- le moteur d'orientation de la cloche est à l'arrêt,
- le moteur de vibration tourne à vitesse constante.

V.A - Justifier l'intérêt d'avoir une direction fixe de vibration, en particulier lors du compactage d'un pont.

On souhaite que $\omega_{52} = -\omega_{42}$; avec $\vec{\Omega}_{5/2} = \omega_{52} \cdot \vec{y}_2$ et $\vec{\Omega}_{4/2} = \omega_{42} \cdot \vec{y}_2$; avec $R_2(O_a, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié à la cloche de vibration 2 .

V.B - Déterminer la relation qu'il faut respecter entre les nombres de dents des pignons 4, 5, 6₄ et 6₇ pour obtenir cette relation entre les vitesses.

V.C - Justifier le rôle du pignon 7 . La disposition des axes de rotation des différents pignons est donnée sur la figure 7b.

Les centres d'inertie G_{4_1} , G_{4_2} et G_{4_3} des balourds de masse m_{4_1} , m_{4_2} et m_{4_3} sont équidistants de l'axe de rotation de l'arbre-balourd (O_a, \vec{y}_2). Les points G_{4_1} et G_{4_3} sont symétriques par rapport au plan médian vertical du cylindre ($O_a, \vec{x}_2, \vec{z}_2$) (figure 7c). Au démarrage, les trois points G_{4_1} , G_{4_2} et G_{4_3} appartiennent au plan ($O_a, \vec{y}_2, \vec{z}_2$).

V.D - Donner l'expression de la résultante dynamique, en régime établi, du système isolé {arbre + 3 masses « balourd »} dans la base liée à la cloche de vibration en négligeant le déplacement du cylindre (donc de la cloche) par rapport au bâti ((O_a, y_2) fixe). Déterminer les relations qu'il faut imposer entre les masses m_{4_1} , m_{4_2} et m_{4_3} pour obtenir une direction fixe de cette résultante dynamique.

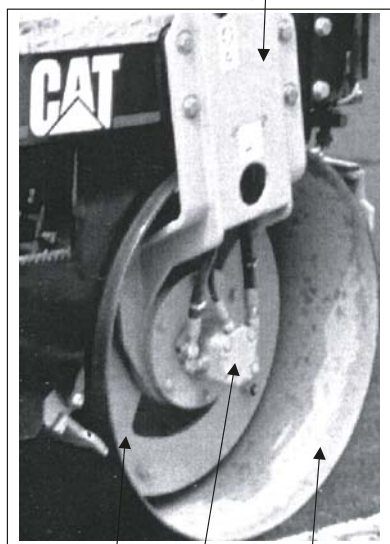
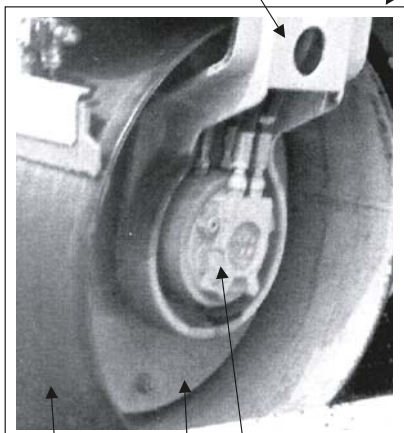
••• FIN •••

Figure 1a : Compacteur 214 D



½ bâti avant

½ bâti arrière



Moteur d'avancement, avant

Cylindre avant

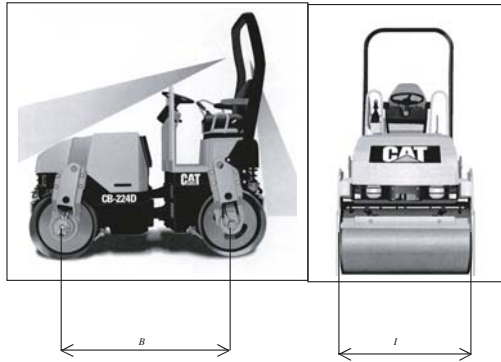
Support de cylindre avant

Support de cylindre arrière

Cylindre arrière

Moteur de vibration, arrière

Figure 1b : Caractéristiques techniques



Caractéristiques techniques		
Vitesse d'avancement	V	0 à 6,5 km.h ⁻¹
Puissance moteur thermique	P_m	22,5 kW
Largeur des cylindres	I	1000 mm
Diamètre de chaque cylindre	D	700 mm
Empattement	B	1730 mm
Masse totale	M_t	2490 kg
Modes de compactage		Vibration sur cylindre avant ou sur les deux
Fréquence de vibration	f	60 Hz

Figure 3 : Rendement global du moteur hydraulique

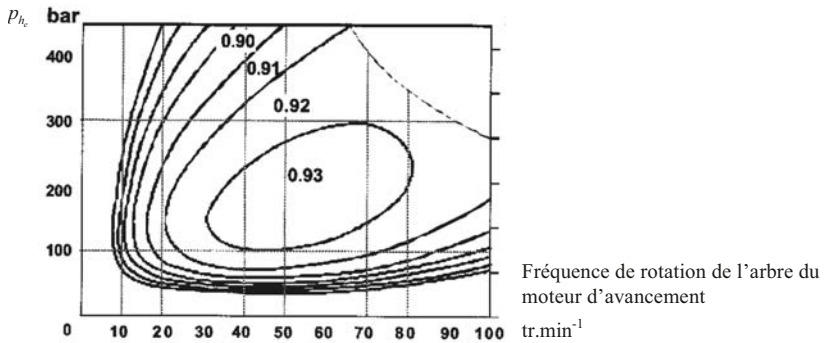


Figure 2 : Schéma cinématique fonctionnel, en vue de dessus, du compacteur

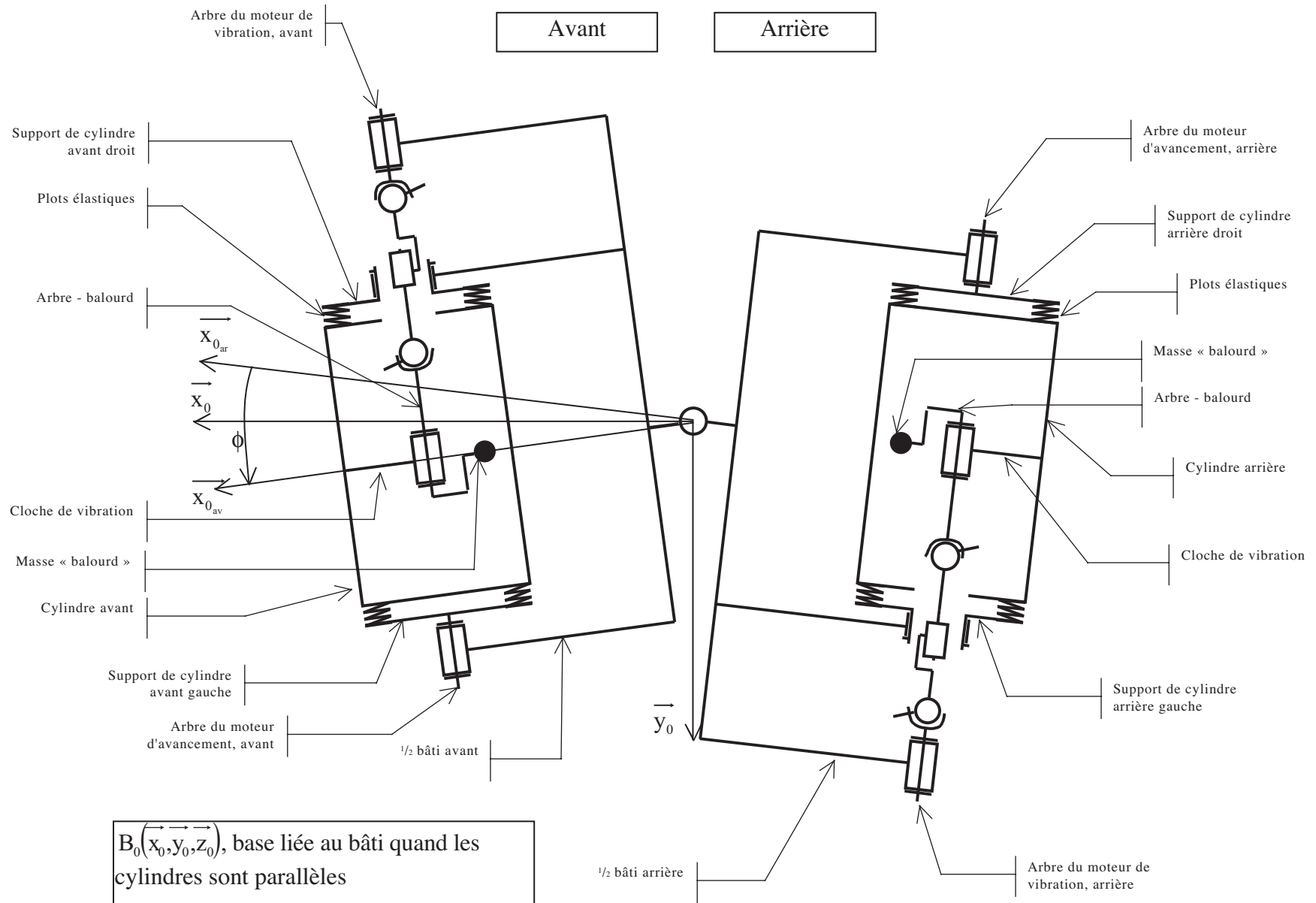


Figure 4 : Schéma cinématique fonctionnel du système d'orientation des cylindres

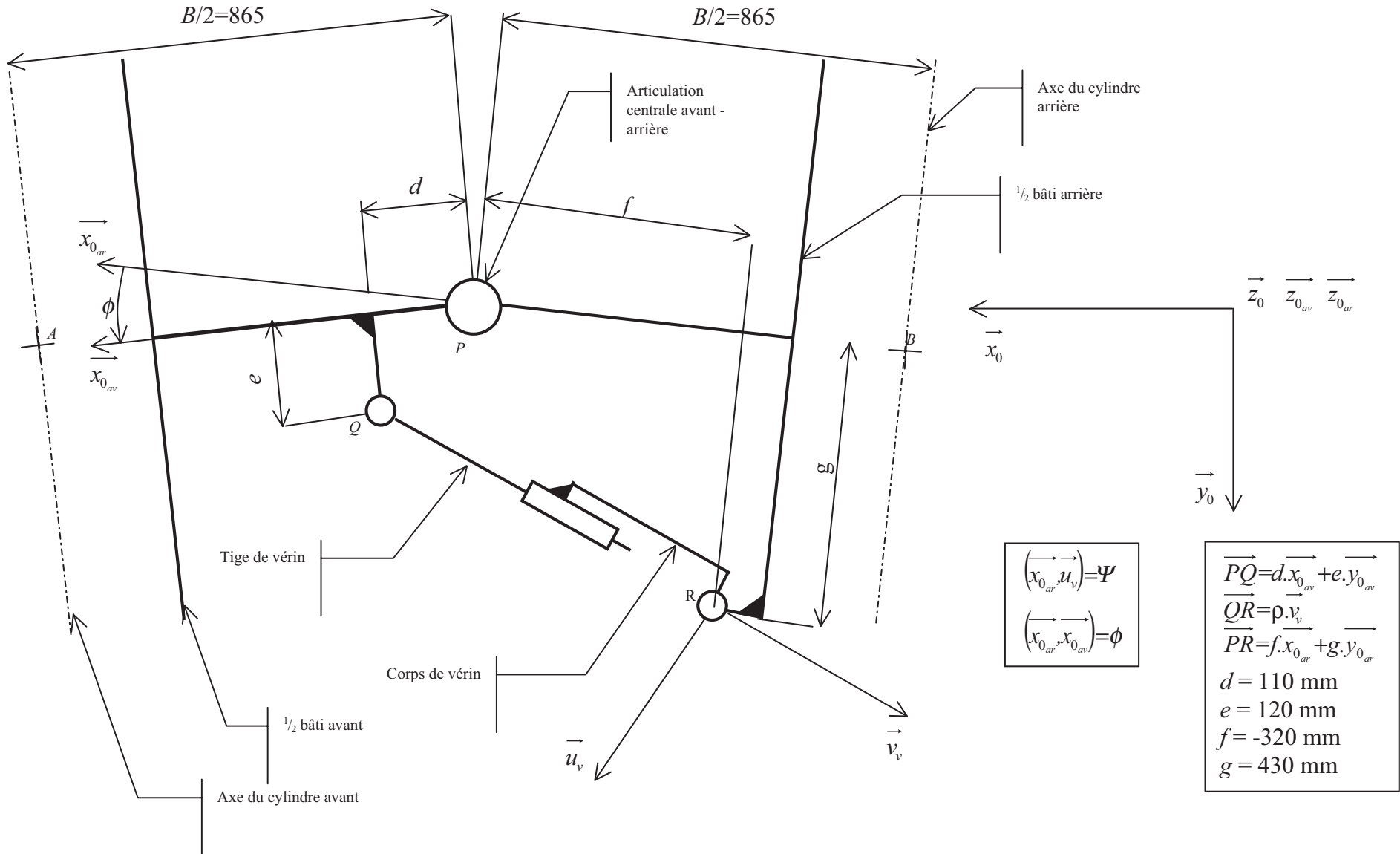


Figure 5 a : Arbre - balourd

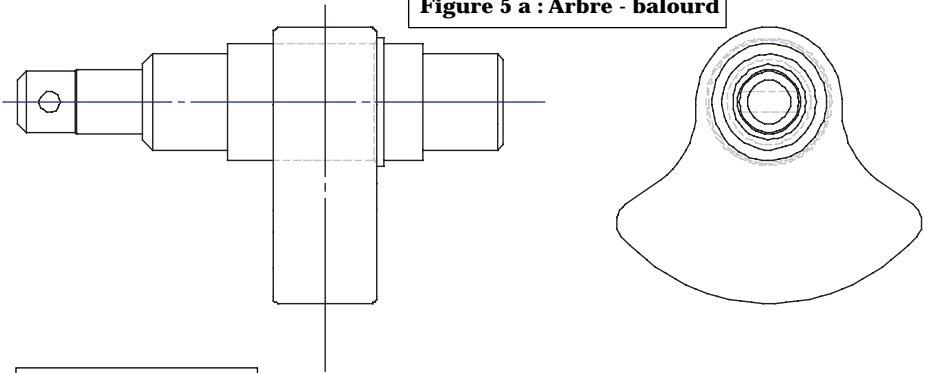


Figure 5 b : Balourd

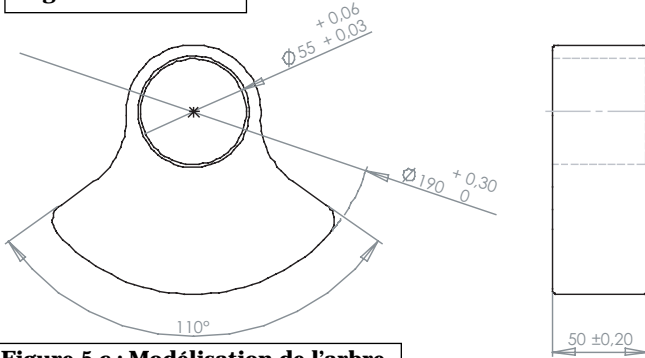
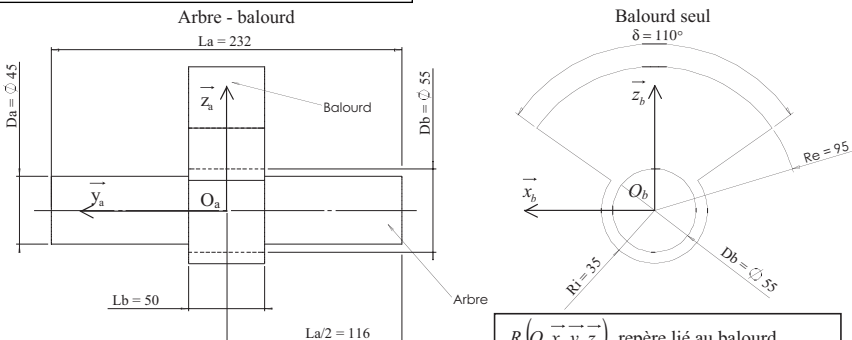
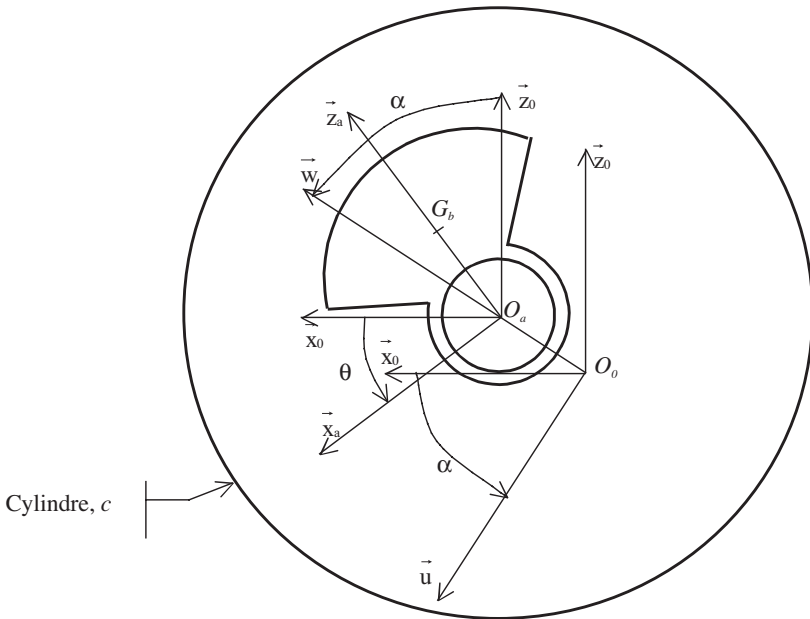


Figure 5 c : Modélisation de l'arbre - balourd et du balourd



$R_b(\vec{O}_b, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$, repère lié au balourd
 $R_b(\vec{O}_b, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b) = R_a(\vec{O}_a, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$
 (\vec{O}_a, \vec{y}_a) est l'axe de rotation de l'arbre - balourd

Figure 6 : Paramétrage de l'arbre-balourd



G_b : centre d'inertie du balourd seul ;
 O_a : point de l'axe de rotation de l'arbre balourd ; on suppose que le centre d'inertie , G_c , du cylindre, c , est sur le point O_a
 $R_0(\vec{O}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère lié au support de cylindre ;
 $R_a(\vec{O}_a, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$, repère lié à l'arbre balourd ;
 $R_c(\vec{O}_a, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère lié au cylindre ;
 $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_a)$ définit la position angulaire de l'arbre – balourd par rapport au bâti ;
 $(\vec{u}, \vec{y}_0, \vec{w})$, base associée au calage angulaire du vecteur $\vec{O}_0\vec{O}_a$; $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u})$ définit ce calage ;
 $\vec{O}_0\vec{O}_a = A\vec{w}$ $\vec{O}_a\vec{G}_b = e\vec{z}_a$

Figure 7a : schéma cinématique fonctionnel du cylindre avant avec le mécanisme de mise en vibration à 3 masses

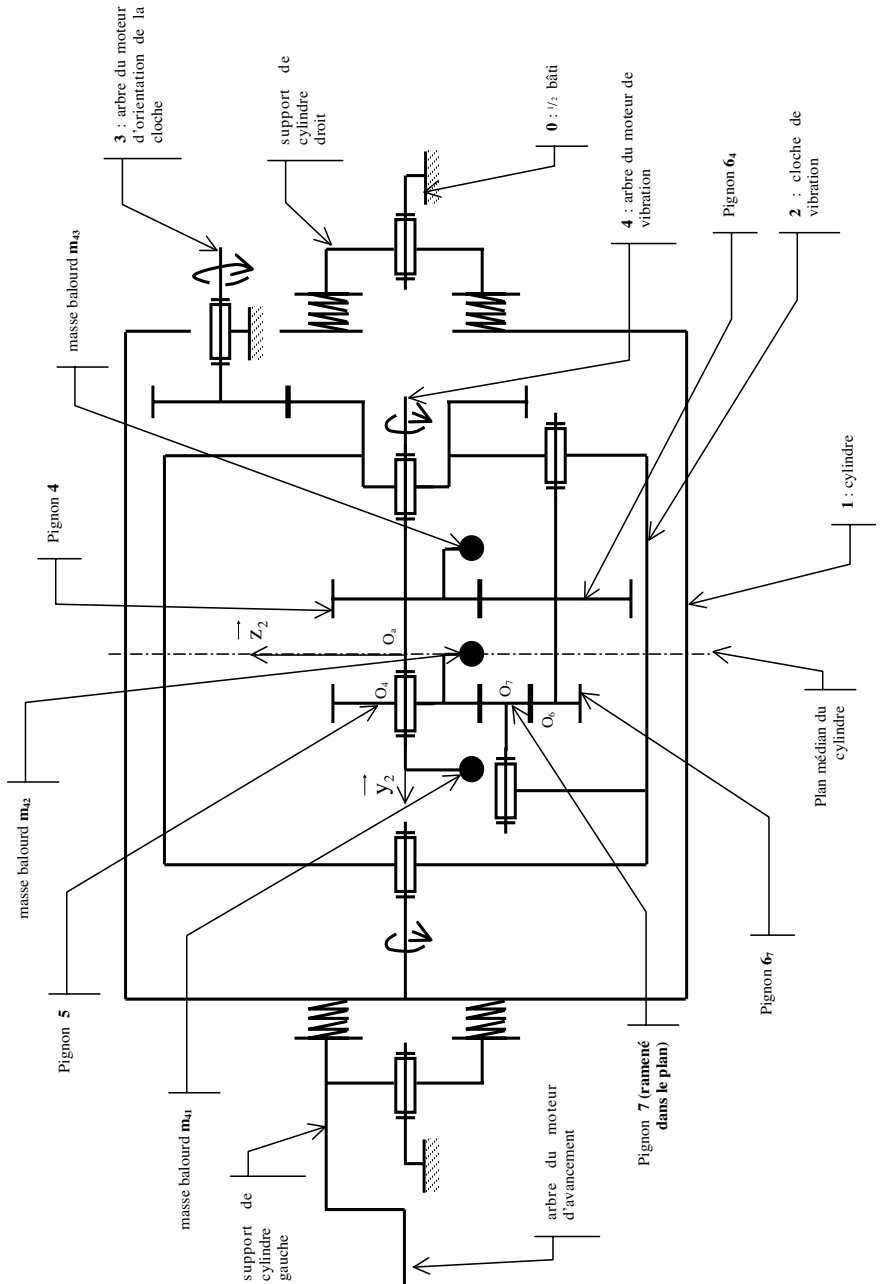
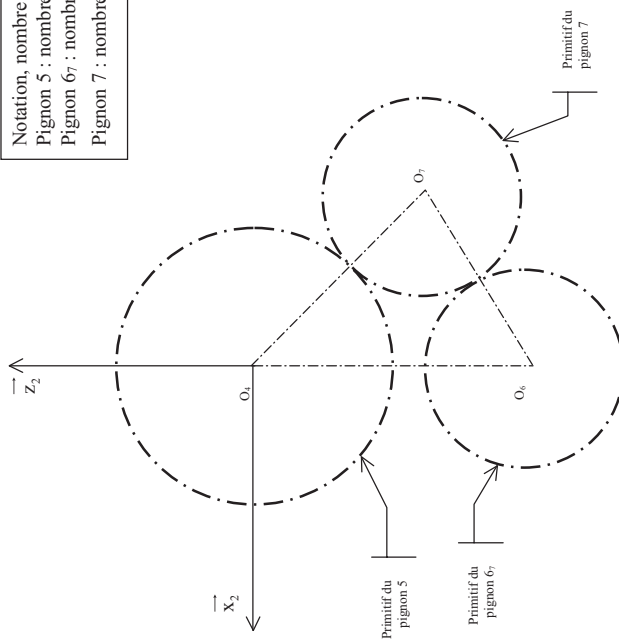


Figure 7 b : Disposition des pignons 5, 6, 7 et 7



Notation, nombre de dents du pignon n^oi : Z_i ;
 Pignon 5 : nombre de dents, Z_5 ;
 Pignon 6 : nombre de dents, Z_6 ;
 Pignon 7 : nombre de dents, Z_7 .

$$\begin{matrix} \vec{O}_a \vec{G}_{4_2} = r Z_{4_2} \\ \vec{O}_a \vec{G}_{4_1} = r Z_{4_1} \end{matrix}$$

Figure 7 c : Disposition des masses m_{41} , m_{42} et m_{43}

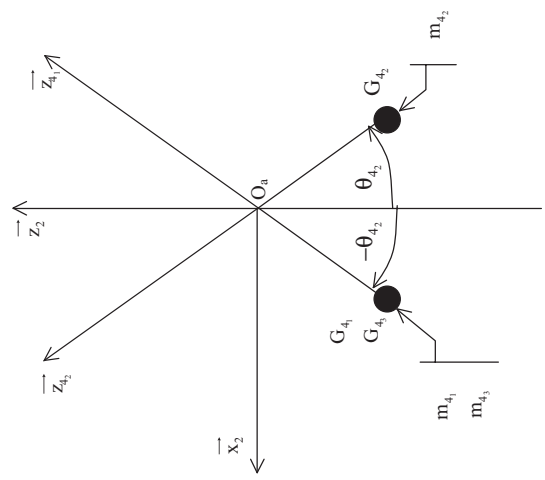


Figure 8 : Dessin de l'ensemble arbre - balourd
Ech : 1 : 1

