

# MATHÉMATIQUES I

## Notations

On note  $I$  le segment  $[-1,1]$  de  $\mathbb{R}$  et  $E$  l'espace préhilbertien complexe des fonctions continues sur  $I$  à valeurs complexes muni du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \overline{f(t)}g(t)dt .$$

Pour tout nombre complexe  $z$  n'appartenant pas à l'intervalle  $]-\infty, 0]$ , on note  $\text{Arg}(z)$  l'unique nombre réel appartenant à l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  tel que  $z = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$ .

Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  et  $p \leq n$ ,  $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

## Questions préliminaires

a) Déterminer le développement en série entière au point 0 de la fonction :

$$]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

et préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} .$$

Montrer que la fonction :

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ est définie sur } \Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} .$$

c) Montrer que  $\varphi$  est une racine carrée de la fonction

$$\Delta \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1-z} \text{ autrement dit, pour tout } z \in \Delta, (\varphi(z))^2 = \frac{1}{1-z} .$$

d) Montrer que :

$$\forall z \in \Delta, \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{|1-z|}} e^{\frac{-i}{2}\text{Arg}(1-z)} . \text{ Que vaut } \varphi(x) \text{ lorsque } x \in ]-1, 1[ ?$$

On pourra dorénavant noter

$$\varphi(z) = (1-z)^{-1/2} \text{ pour } z \in \Delta .$$

# Filière PC

e) Cette question est indépendante des précédentes.

Pour tout entier naturel  $n$ , prouver l'existence d'une fonction polynomiale  $H_n$  telle que, pour tout réel  $\theta$ , on a  $H_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ .

## Partie I -

**I.A -** Montrer que, pour tout  $t \in I$ , la fonction

$$\psi_t : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(t, x) \text{ définie par : } \psi_t(x) = (1 - 2xt + x^2)^{-1/2}$$

est l'unique solution sur  $] -1, 1[$  d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux prenant la valeur 1 en 0. On donnera cette équation différentielle :

(E) :  $a(t, x)y' + b(t, x)y = 0$  où  $a$  et  $b$  sont des polynômes unitaires en  $x$ .

**I.B -**

**I.B.1)** Vérifier que pour  $x \in ]-1, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  on a

$$\Psi_{\cos \theta}(x) = \varphi(xe^{i\theta})\varphi(xe^{-i\theta}), \text{ puis } \Psi_{\cos \theta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\theta)x^n$$

où  $G_n$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'applications de la forme  $\theta \mapsto e^{ik\theta}$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Préciser la valeur de  $G_n(0)$ .

**I.B.2)** Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a  $G_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$  où  $P_n$  est un polynôme à coefficients réels.

**I.B.3)** Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a  $|G_n(\theta)| \leq G_n(0)$ , puis que pour

$$t \in [-1, 1] \text{ et } x \in ]-1, 1[, f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n \quad (1)$$

avec convergence normale sur  $[-1, 1] \times [-a, a]$  où  $a \in ]0, 1[$ .

**I.B.4)** Montrer que la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifie  $P_0(t) = 1$ ,  $P_1(t) = t$  et pour

$$n \geq 1, (2n+1)tP_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t) \quad (2)$$

**I.B.5)** Déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le degré et la parité de  $P_n$ . Déterminer le coefficient dominant de  $P_n$ , ainsi que  $P_n(1)$  et  $P_n(-1)$ .

## I.C -

I.C.1) Soit  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $]1, +\infty[$ . Calculer et simplifier la dérivée de la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$h : t \mapsto \ln \left[ \frac{(a-t) + (b-t)}{2} - \sqrt{(a-t)(b-t)} \right]$$

après avoir vérifié qu'elle est bien définie.

En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)}} \text{ pour tout couple } (a, b) \text{ d'éléments de } ]1, +\infty[.$$

I.C.2) Montrer que :

$$\int_{-1}^1 f(t, x) f(t, y) dt = \frac{1}{\sqrt{xy}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{xy}}{1 - \sqrt{xy}} \right] \text{ pour tout couple } (x, y) \text{ d'éléments de } ]0, 1[.$$

On admettra sans démonstration l'identité suivante :

$$2\sqrt{xy}(1-x)(1-y) - (x+y)(1+xy) + 4xy = (1 + \sqrt{xy})^2 (2\sqrt{xy} - (x+y))$$

I.C.3)

a) Pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $]0, 1[$  établir que :

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{xy}}{1 - \sqrt{xy}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^n y^n.$$

b) On fixe  $y$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Montrer que, pour tout couple  $(t, x)$  appartenant à  $I \times ]0, 1[$  :

$$f(t, x) f(t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) f(t, y) x^n$$

la série convergeant normalement sur tout l'ensemble de la forme  $I \times ]0, a[$  avec  $a \in ]0, 1[$ . Conclure que :

$$\int_{-1}^1 P_n(t) f(t, y) dt = \frac{2}{2n+1} y^n.$$

c) En écrivant que, pour tout  $(t, y) \in I \times ]0, 1[$ ,  $f(t, y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) y^m$ , prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt \right) y^m = \frac{2}{2n+1} y^n.$$

d) Conclure que

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{n, m}$$

où  $\delta_{n,m}$  est le symbole de Kronecker :  $\delta_{n,m} = 1$  si  $m = n$  et  $\delta_{n,m} = 0$  sinon. Interpréter le résultat obtenu.

**I.D -** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1 et  $z$  un zéro de  $P_n$  (*a priori* dans  $\mathbb{C}$ ). On note  $R_n$  la fonction polynôme telle que, pour  $t \neq z$ ,  $R_n(t) = \frac{P_n(t)}{t-z}$ .

I.D.1) Calculer  $(R_n|P_n)$ .

I.D.2) En déduire que  $z$  est réel et que  $|z| < 1$ .

I.D.3) Montrer que  $z$  est une racine simple de  $P_n$ .

**I.E -**

I.E.1) En utilisant (2), établir que, pour tout entier naturel  $n$  et tout couple  $(x,y)$  de nombres complexes distincts :

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1) \frac{[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)]}{x-y}. \quad (3)$$

I.E.2) En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{C}$  :

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)(P_k(x))^2 = (n+1)[P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)] \quad (4)$$

I.E.3) Déduire de cette dernière formule que tout zéro de  $P_n$  est strictement compris entre deux zéros consécutifs de  $P_{n+1}$ .

**I.F -** Pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , on note  $Af$  la fonction de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$Af(t) = \frac{d}{dt}[(1-t^2)f'(t)]$$

Prouver que, pour tout couple  $(f,g)$  de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ ,  $(Af|g) = (f|Ag)$ .

En déduire que, pour tout  $n \geq 1$  et tout entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $(P_k|AP_n) = 0$ .

En déduire que  $P_n$  est solution de l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0. \quad (5)$$

## **Partie II -**

**II.A -**

II.A.1) On associe à  $n \in \mathbb{N}$  et à  $f \in E$  le coefficient  $c_n(f) = (P_n|f)$ . Montrer que la série de terme général

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) |c_n(f)|^2 \text{ est convergente.}$$

II.A.2) Montrer, à l'aide de I.F - que si  $f \in E$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , alors la série  $\sum n^5 |c_n(f)|^2$  est convergente.

En déduire que la série  $\sum n |c_n(f)|$  est convergente.

## II.B -

II.B.1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_n$  dans  $E$  par  $f_n : t \mapsto t^n$ .

Montrer que si  $f \in E$  est telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f_n | f) = 0$  alors  $f$  est nulle.

II.B.2) Supposant  $f \in E$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , montrer que l'expression :

$$g(t) = f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(f) P_n(t) \text{ définit sur } I \text{ une fonction continue } g.$$

II.B.3) Montrer que  $g$  est nulle.

II.B.4) Déduire de ce qui précède une condition suffisante pour que la série de fonctions

$$\sum \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(f) P_n \text{ converge normalement sur } I \text{ et ait pour somme } f.$$

II.C - Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , vérifier que la fonction  $t \mapsto \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}$  est intégrable sur le segment  $I$ .

Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto Q_n(x)$  définie par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} dt$$

est une fonction polynôme de degré  $(n - 1)$  et que la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les conditions initiales  $Q_0 = 0$ ,  $Q_1 = 2$  et la même relation de récurrence que la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir du rang  $n = 1$ .

II.D - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. On note  $a_1, \dots, a_n$  les zéros de  $P_n$  écrits dans l'ordre croissant, i.e.  $-1 < a_1 < \dots < a_n < 1$ .

II.D.1) Montrer que  $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$  où

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \text{ est une base de } R_{n-1}[X].$$

II.D.2) Soit  $\mathcal{C} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  où  $\varphi_i : R_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \mapsto P(a_i)$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $R_{n-1}[X]$ .

II.D.3) En déduire qu'il existe une suite  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de nombres réels et une seule telle que :

$$\forall P \in R_{n-1}[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i).$$

II.D.4) Montrer, en utilisant éventuellement une division euclidienne par  $P_n$  :

$$\forall P \in R_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i). \quad (6)$$

II.D.5) Montrer que les  $\lambda_i$  sont éléments de  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 2$

### II.E -

II.E.1) Montrer que si  $Q_n$  est le polynôme défini en II.C alors, avec les notations de II.D, on a :

$$Q_n(x) = P_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

On pourra commencer par examiner le cas où  $x > 1$ .

II.E.2) En déduire que les  $(n-1)$  zéros de  $Q_n$  sont situés strictement entre les zéros de  $P_n$ .

### II.F -

II.F.1) Montrer, pour  $x > 1$ , que :

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x - a_i} \left(\frac{a_i}{x}\right)^{2n} - \frac{1}{x^{2n}} \int_{-1}^1 \frac{t^{2n}}{x-t} dt.$$

II.F.2) En déduire que, pour tout  $\alpha > 0$ , la suite de fonctions

$$\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

approche uniformément la fonction

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \text{ sur l'intervalle } [1 + \alpha, +\infty[.$$

---

••• FIN •••

---