



Le but des deux premières parties est d'étudier l'existence d'une fonction de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. Les deux parties suivantes sont consacrées à des classes de fonctions pour lesquelles les dérivées successives en 0 de  $f$  déterminent complètement la fonction  $f$ .

On note  $\mathcal{W}$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans  $\mathcal{W}$ ). On notera  $\binom{n}{p}$  ou  $C_n^p$  les coefficients binomiaux.

## I Intervention des séries entières

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , qui sont somme d'une série entière sur un intervalle  $]-\delta, \delta[$  pour au moins un réel  $\delta > 0$  et vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = u_n$ .

**I.A** – Si  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour tout  $x \in ]-\delta, \delta[$ , avec  $\delta > 0$ , donner une expression de  $f^{(k)}(x)$  sur  $]-\delta, \delta[$ , et en déduire  $f^{(k)}(0)$  en fonction de  $a_k$  pour tout  $k \geq 0$ .

**I.B** – Dans les exemples suivants, proposer une solution  $f$ , en précisant une valeur de  $\delta$  convenable :

**I.B.1)**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$ .

**I.B.2)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  pair,  $u_n = (-1)^{n/2} n!$ , et pour tout  $n$  impair,  $u_n = 0$ .

**I.C** – Pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n)!$ , montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

## II Le théorème de Borel

### II.A – Une fonction en cloche

Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

#### II.A.1)

a) Montrer que pour tout naturel  $p$  il existe un polynôme  $Q_p \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier  $p \geq 1$ , exprimer  $Q_p$  en fonction de  $Q_{p-1}$  et  $Q'_{p-1}$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $p$  non nul,  $Q_p$  est de degré  $3p - 2$ .

c) Écrire dans le langage de calcul formel de votre choix un algorithme d'argument un entier  $p$  renvoyant la valeur de  $Q_p$  en fonction d'une indéterminée  $X$ .

On pourra utiliser la commande renvoyant, à partir d'une expression  $E$  et d'une variable  $x$ , la valeur de la dérivée de cette expression par rapport à cette variable que l'on pourra noter **diff(E,x)** ou **D[E,x]** selon le langage choisi.

#### II.A.2)

a) Montrer que pour tout entier naturel  $p$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g^{(p)}(x) = 0.$$

b) En déduire que  $g \in \mathcal{W}$ .

### II.B – Une fonction en plateau

Soit  $h$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie, pour tout réel  $x$ , par  $h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t) dt}{\int_0^1 g(t) dt}$ .

**II.B.1)** Montrer que  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , constante sur  $]-\infty, 1]$  et sur  $[2, \infty[$ .

**II.B.2)** Soit  $\varphi$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$  pour tout réel  $x$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\varphi^{(p)}(0) = 0$  pour tout  $p \geq 1$ .

b) Montrer que  $\varphi$  est nulle en dehors de  $[-1, 1]$  et tracer sommairement l'allure de son graphe.

c) Justifier pour tout entier naturel  $p$  non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi^{(k)}(x)|$$

### II.C – Le théorème de Borel

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On définit pour tout entier naturel  $n$  une fonction  $g_n$  par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{et si } n \geq 1 \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n!} \varphi(\beta_n x)$$

où  $\beta_n = \max(1, 4^n |u_n| \lambda_n)$ .

#### II.C.1)

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $g_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $g_n$  est nulle hors du segment  $\left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right]$ .

II.C.2) Soit  $n$  et  $j$  des entiers naturels tels que  $j < n$ .

a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

b) En déduire que  $g_n^{(j)}(0) = 0$ .

c) Montrer que, pour tout réel  $x$  tel que  $|x| \geq \frac{1}{\beta_n}$ , on a  $g_n^{(j)}(x) = 0$ .

d) Montrer que, pour tout réel  $x$  tel que  $|x| \leq \frac{1}{\beta_n}$ , on a  $|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$ .

II.C.3) Déduire des questions précédentes que pour  $n, j \in \mathbb{N}$ ,

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

II.C.4) En considérant  $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n g_n$ , montrer qu'il existe une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall j \in \mathbb{N}, f^{(j)}(0) = u_j$  (théorème de Borel).

## III Un autre élément de $\mathcal{W}$

On considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série  $\sum a_n$  converge.

### III.A – Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout  $x$  réel

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2} (|x + a_0| + |x - a_0| - 2|x|).$$

III.A.1) Montrer que  $f_0$  est nulle en dehors de  $[-a_0, a_0]$ , préciser sa valeur sur  $[-a_0, 0]$  et  $[0, a_0]$ , justifier sa continuité et tracer rapidement son graphe.

III.A.2) On pose  $k = \frac{1}{a_0^2}$ .

a) Pour tout réel  $x$ , montrer que  $|f_0(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ .

b) Montrer que  $f_0$  est lipschitzienne de rapport  $k$  sur  $\mathbb{R}$ .

### III.B – La première étape

On pose pour tout  $x$  réel

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t) dt$$

III.B.1) Montrer que  $f_1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f_1'(x)$  pour tout  $x$  réel.

III.B.2) Montrer que  $f_1$  est nulle en dehors de  $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$ .

III.B.3) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |f_1(x)| \leq \frac{1}{a_0}$  et  $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$ .

III.B.4) Montrer que  $f_1$  est lipschitzienne de rapport  $k$  sur  $\mathbb{R}$ .

### III.C – Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions par  $f_0$  et  $f_1$  définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel  $n \geq 2$  et tout  $x$  réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t) dt$$

**III.C.1)** Montrer que  $f_n$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'_n(x)$  pour tout  $x$  réel.

**III.C.2)** Montrer que  $f_n$  est nulle en dehors de  $[-\sum_{i=0}^n a_i, \sum_{i=0}^n a_i]$ .

**III.C.3)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{a_0}$  et que, si  $p \leq n$ , on a  $|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$ .

**III.C.4)** Montrer que  $f_n$  est lipschitzienne de rapport  $k$  sur  $\mathbb{R}$ .

**III.C.5)** Montrer que pour tout naturel  $n$

$$\int_{-S}^S f_n(t) dt = 1 \quad \text{où } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

### III.D – La limite

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} k_n$  où  $k_n = f_n - f_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

**III.D.1)**

a) Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $x$ , montrer que  $|k_n(x)| \leq \frac{k}{2} a_n$ .

b) En déduire la convergence normale de la série de fonctions  $\sum k_n$ .

Pour tout réel  $x$ , on note

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x)$$

**III.D.2)**

a) Montrer que pour tout  $x$  réel,  $f_n(x)$  converge vers une limite que l'on notera  $w(x)$  et qui vérifie  $w(x) = f_0(x) + s(x)$ .

b) Pour tout réel  $x$  réel, montrer que  $|w(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ .

c) Montrer que  $w$  est lipschitzienne de rapport  $k$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Montrer que  $w$  est nulle en dehors du segment  $[-S, S]$ .

**III.D.3)**

a) Montrer que

$$\int_{-S}^S w(t) dt = 1.$$

b) En déduire que  $w$  n'est pas constante nulle sur  $\mathbb{R}$ .

**III.D.4)**

a) Montrer que  $\sum_{n \geq 2} (f'_n - f'_{n-1})$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

b) Trouver un lien entre  $w$ ,  $f_1$  et  $\sum_{n=2}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$ .

c) En déduire que  $w$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Montrer que pour tout  $x$  réel,  $|w'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$ .

**III.D.5)** Soit  $p \geq 2$ .

a) Montrer que  $\sum_{n \geq p+1} (f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

b) Trouver un lien entre  $w$ ,  $f_p$  et  $\sum_{n=p+1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$ .

c) En déduire que  $w$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$ .

d) Montrer que pour tout  $x$  réel,  $|w^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$ .

## IV Classes quasi-analytiques

On considère une suite réelle  $M = (M_n)_{n \geq 0}$  vérifiant les trois conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n > 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$M_0 = 1 \quad (\text{IV.2})$$

$$\forall n \geq 1, \quad M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1} \quad (\text{IV.3})$$

On note  $\mathcal{C}(M)$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  pour lesquelles il existe deux constantes  $A > 0$  et  $B > 0$  (dépendantes de  $f$ ) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq AB^n M_n.$$

L'ensemble  $\mathcal{C}(M)$  est dit classe associée à la suite  $M$ .

La classe  $\mathcal{C}(M)$  est dite quasi-analytique si

$$\forall f \in \mathcal{C}(M) \quad (\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0) \Rightarrow f = 0.$$

### IV.A – Quelques propriétés d'une classe

**IV.A.1)** Montrer que si  $f \in \mathcal{C}(M)$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , alors la fonction  $g : x \mapsto f(ax + b)$  appartient aussi à  $\mathcal{C}(M)$ .

**IV.A.2)** Vérifier que  $\mathcal{C}(M)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

**IV.A.3)**

a) Montrer que pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que  $k \leq n$ , on a  $M_k M_{n-k} \leq M_n$ . On pourra étudier, pour  $p$  fixé, la monotonie de la suite  $(M_n/M_{n-p})_{n \geq p}$ .

b) En déduire que le produit de deux éléments quelconques de  $\mathcal{C}(M)$  est un élément de  $\mathcal{C}(M)$ .

### IV.B – Un exemple de classe quasi-analytique

On note  $U$  la suite définie par  $U_n = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**IV.B.1)** Montrer que la suite  $U$  vérifie les conditions **IV.1**, **IV.2** et **IV.3**.

**IV.B.2)** Soit  $f \in \mathcal{C}(U)$ ; on fixe  $A > 0, B > 0$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq AB^n n!$$

a) Dans cette question et la suivante, on suppose que le réel  $\alpha$  vérifie  $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(\alpha) = 0$ . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

b) En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow f(x) = 0$ .

c) Montrer que  $\mathcal{C}(U)$  est une classe quasi-analytique.

### IV.C –

**IV.C.1)** Montrer que si  $\mathcal{C}(M)$  est quasi-analytique, alors  $\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{W} = \{0\}$ .

**IV.C.2)** Montrer la réciproque; on pourra montrer, lorsque  $\mathcal{C}(M)$  n'est pas quasi-analytique, l'existence d'une fonction  $g \neq 0$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , nulle sur  $]-\infty, 0]$ , puis considérer  $h : x \mapsto g(x)g(c-x)$  pour un  $c \in \mathbb{R}$  bien choisi.

**IV.D –** On se donne une suite réelle  $M = (M_n)_{n \geq 0}$  vérifiant les trois conditions **IV.1**, **IV.2** et **IV.3** et on considère les assertions :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{M_n} \right)^{1/n} \text{ converge} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{M_{n-1}}{M_n} \text{ converge} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{la classe } \mathcal{C}(M) \text{ n'est pas quasi-analytique} \quad (\text{IV.6})$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\alpha_n = M_{n-1}/M_n$ .

**IV.D.1)** Exprimer  $M_n$  en fonction de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et en déduire que **IV.4**  $\Rightarrow$  **IV.5**.

**IV.D.2)** Démontrer en utilisant la **partie III** que **IV.5**  $\Rightarrow$  **IV.6**.

On peut montrer à l'aide d'outils mathématiques plus élaborés que **IV.6**  $\Rightarrow$  **IV.4**, ce qui donne une caractérisation des classes quasi-analytiques. Ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Carleman.

• • • FIN • • •