

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet comprend quatre parties dont les trois premières sont dans une large mesure indépendantes, la quatrième permettant de mobiliser les résultats précédents. Les domaines utilisés dans ce sujet sont classiques : calcul matriciel, diagonalisation, matrices symétriques, produit scalaire et polynômes.

Analyse globale des résultats

Le sujet est de longueur raisonnable et de difficulté graduelle. Les candidats ayant une bonne connaissance du cours et utilisant correctement les définitions rappelées dans l'énoncé ont obtenu un résultat honorable.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Commentaires généraux

Compréhension du sujet

Les candidats ont pu aborder une grande partie des questions. Néanmoins beaucoup de confusions sont faites lors de l'interprétation de l'énoncé. La lecture de l'énoncé semble avoir été survolée par un grand nombre de candidats. Beaucoup de définitions sont données dans l'énoncé mais ne sont pas comprises ou sont mal utilisées par une grande partie des candidats (comme par exemple la définition d'une matrice positive). Dans le même ordre d'idée, il est important de répondre intégralement à la question posée (beaucoup oublient de donner les espaces propres dans **Q3** par exemple). La notion de condition nécessaire et suffisante et d'équivalence de propriétés est très mal comprise en général.

Cours

Le cours est parfois mal connu, les questions de cours simples (comme la définition d'une matrice symétrique) n'ont pas été bien réussies.

La question **Q4** permettait déjà de discerner les candidats maîtrisant la notion de polynôme scindé et de polynôme scindé à racines simples.

Q7. La formule de changement de bases n'est pas souvent reconnue et encore moins souvent bien justifiée.

Q11. La définition d'un polynôme unitaire est très rarement connue. Les candidats pensent qu'il s'agit d'un polynôme dont tous les coefficients valent 1 alors que seul son coefficient dominant vaut 1.

Q15, Q25. Oubli de la précision matrice symétrique réelle.

Q17, Q26, Q30. Oubli du fait que par définition un vecteur propre est non nul.

Calculs

Beaucoup de candidats utilisent leur calculatrice pour effectuer des calculs de valeurs propres, espaces propres, matrice inverse. Dans ce cas il faut tout de même justifier ses résultats. Il est notamment important de justifier que les valeurs propres sont obtenues par le calcul (à la machine) des racines du polynôme caractéristique.

Le calcul des polynômes caractéristiques est dans la plupart des cas bien réalisé.

Les candidats effectuent souvent des calculs inutiles. Par exemple, calculer la matrice P^{-1} dans **Q2** n'était pas nécessaire, ni le calcul de R^{-1} dans **Q7** pour laquelle il fallait utiliser une formule de changement de bases. Dans **Q26**, il fallait utiliser la définition d'un vecteur propre et ne pas calculer toutes les valeurs propres et espaces propres des matrices !

Raisonnement

Certaines copies ne sont pas du tout rédigées et abusent d'abréviations, ce qui nuit grandement à la compréhension et est donc pénalisé en conséquence. De même, on peut déplorer le manque de soin apporté à de nombreuses copies ce qui est encore une fois pénalisé. Il faudrait également de façon générale, que les candidats démontrent leurs affirmations. Par ailleurs, exhiber un exemple n'a pas valeur de démonstration.

Divers

La manipulation des polynômes unitaires a posé de nombreux problèmes lors de la première partie.

Le passage d'un exemple au cas général est aussi problématique. La notion même de preuve semble ne plus aller de soi.

L'utilisation d'une nouvelle notion (matrices positives, explicitement définies dans la partie II) est très mal comprise.

Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas suffisamment le français (ce qui explique aussi les difficultés de compréhension du sujet).

Commentaires par question

I Matrices compagnons

Q1–Q3. Bien traitées en général.

Q4. Bien traitée dans de nombreuses copies ; beaucoup cependant pensent à tort que lorsqu'une matrice n'est pas diagonalisable alors elle est trigonalisable.

Q5, Q6. Bien traitées en général.

Q8. Très rarement traitée correctement. Il fallait commencer par énoncer correctement une hypothèse de récurrence.

Q9. Il est rare que les candidats démontrent l'équivalence. Il était plus judicieux de procéder par double implication.

Q11, Q12. Peu réussies, la notion de polynôme unitaire n'est pas connue.

II Matrices symétriques positives

Q13, Q14. La majorité des candidats ne démontrent pas que la matrice est symétrique *et* positive. Une des deux propriétés est quasiment toujours oubliée ce qui est une erreur récurrente dans ce sujet.

Q15. Souvent bien réussie, il s'agit de l'énoncé du théorème spectral. Il est important que la matrice symétrique ait ses coefficients réels pour conclure mais inutile de préciser que la matrice est positive.

Q16. Réussie par les candidats qui connaissent la définition d'un vecteur propre.

Q17. Les candidats oublient quasi-systématiquement de justifier qu'un vecteur propre est non nul.

Q18. Les candidats oublient souvent de justifier que la matrice est diagonalisable. C'est à cette condition qu'on pouvait relier les valeurs propres avec la trace et le déterminant.

Q19, Q20. Assez bien réussies en général mis à part quelques libertés parfois prises avec le calcul matriciel.

Q21. Il suffit ici de récapituler les résultats des questions précédentes. Il faut néanmoins comprendre la notion d'équivalence logique ce que peu de candidats ont su faire.

Q22, Q23. Ont été réussies uniquement par les meilleures copies.

III Produits de Kronecker

Q24. Réussie par quasiment toutes les copies.

Q25. Bien réussie en général.

Q26. Assez bien réussie. Les candidats oublient encore de justifier que les vecteurs propres sont non nuls. Beaucoup de candidats ont très maladroitement essayé de calculer les polynômes caractéristiques des trois matrices. C'était long, inutile et souvent faux.

Q27–Q29. Souvent bien réussies. Il est utile de suivre les recommandations de l'énoncé et de faire une preuve avec des matrices 2×2 .

Q30. Réussie par les candidats maîtrisant la définition d'un vecteur propre et ayant su utilisé la relation admise par l'énoncé. Encore une fois il faut justifier que le vecteur pressenti pour être un vecteur propre est non nul.

Q31. Un quart des candidats abordent cette question. Parmi ceux-ci seuls les meilleurs ont abouti.

Q32. Une proportion non négligeable de candidats a réussi le premier calcul mais les autres calculs ne sont pas souvent traités.

Q33, Q34. Très peu réussie. Uniquement par les tout meilleurs candidats.

Q35–Q37. Les candidats (environ un cinquième) ayant compris la notion donnée par l'énoncé et la notion de polynôme unitaire n'ont pas eu de difficulté majeure à résoudre au moins partiellement ces questions.

Q38. Seules les toutes meilleures copies ont donné une réponse correcte.

IV États quantiques de Werner

Cette dernière partie, exceptées les questions **Q39** et **Q40**, a été traitée par très peu de candidats mis à part quelques tentatives (pour la plupart infructueuses) de grappillage de points.

Conclusion

Le sujet a permis aux candidats maîtrisant les notions du cours et faisant preuve d'une aisance dans les calculs attendue au niveau bac+2 d'obtenir un nombre de points assez conséquent. Cependant, la mauvaise maîtrise de la langue et la mauvaise compréhension de l'énoncé a fortement pénalisé la majorité des candidats. Le jury a déploré de trop nombreuses et inquiétantes confusions dans la lecture de l'énoncé et dans la compréhension des définitions données dans le sujet.