Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve propose une étude des matrices symplectiques (réelles) associées à la matrice antisymétrique $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$, de taille $2n$. Le problème définit la notion de *matrice symplectique* comme toute matrice $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top J_n M = J_n$.

La partie I est consacrée au cas de la dimension 2, proposant une caractérisation générale des matrices symplectiques de taille 2 par leur déterminant. Cette partie propose également une caractérisation des matrices symplectiques orthogonales (Q3 et Q4), symétriques (Q5) et antisymétriques (Q6).

La partie II propose d'étendre le résultat trouvé en Q3-Q4, à propos des matrices symplectiques et orthogonales, aux matrices de taille quelconque. La partie III, très courte, permet de découvrir la structure de groupe (sans la nommer) que possède l'ensemble des matrices symplectiques.

Plus difficile, la partie IV permet d'aboutir à la réduction des matrices symétriques et symplectiques de taille quelconque et la partie V, celle des matrices antisymétriques et symplectiques. Ces parties sont chacune assorties d'une application numérique (Q25-Q26 pour les matrices symétriques, Q35-Q36 pour les matrices antisymétriques).

Analyse globale des résultats

Sur les 3517 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 21,8 % pour un écart-type de 12,7 %. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu 81 % des points du barème total.

Les parties I et II ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 99 % d'entre eux). Il en est presque de même pour les parties III et IV (entamées par plus de 90 % des copies) et la partie V a été légèrement plus délaissée (76 % des copies). Les parties IV et V proposent des questions d'application numérique (Q25 et Q35) pouvant être traitées indépendamment du reste du sujet, ce qui explique ces chiffres.

La notion de matrice symplectique, certainement nouvelle pour la grande majorité des candidats, a été plutôt bien prise en charge par ceux-ci, malgré certaines généralisations hâtives du cas de la dimension 2 (partie I) au cas général (partie II et suivantes). À l'inverse, on note quelques malentendus surprenants sur les notions de matrice symétrique ou antisymétrique, pourtant certainement étudiées en classe et rappelées en début de sujet.

La différence entre les copies se fait essentiellement sur les trois points suivants, indicatifs du niveau de soin et de discipline pratiqué par les candidats dans leurs raisonnements :

- la **rigueur logique**, en particulier le maniement soigneux des implications et des équivalences, ainsi que des quantificateurs — on note trop de confusions dans ce domaine, ce qui porte préjudice dès le début du sujet (questions Q2 et Q3) ;

- des **vérifications de non nullité** — avant de diviser par une quantité, il importe de vérifier (voire justifier) qu'elle est bien non nulle (cf. remarques détaillées, plus loin) ; par ailleurs, la notion de vecteur propre comporte une exigence de non nullité. De nombreuses questions de ce sujet appellent ce genre de vérification ;

- la **connaissance précise de notions de base** du programme — matrice symétrique, antisymétrique, application linéaire (question Q7), transposition / inversion d'un produit matriciel $(AB)^\top = B^\top A^\top$ et non $A^\top B^\top$), condition nécessaire et suffisante sur les colonnes d'une matrice pour qu'elle soit orthogonale (question Q4 et analogues), notions de famille libre / génératrice / base (question Q20 notamment : la concaténation de deux bases d'un espace non nul ne peut former une base de cet espace).

Le jury reste surpris que les trois points ci-dessus constituent les principaux facteurs de discrimination parmi les candidats, à ce niveau d'études scientifiques. Il est donc important que les futurs candidats en prennent bonne note en vue des prochaines éditions.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux, dans la correction des copies et en tire les recommandations suivantes.

- **Attention aux divisions par zéro.** Aux questions Q3, Q16, Q19, le candidat était souvent amené à simplifier par des quantités abstraites. Le jury regrette que la plupart d'entre eux aient procédé à ces simplifications sans même s'inquiéter de la non-nullité de la quantité simplifiée. Par exemple, à la question Q16, l'écriture $\det(M)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$ donnait, dans beaucoup de copies, $\det(M)^2 = 1$ à l'étape suivante, sans la moindre discussion quant à la non-nullité de $\det(J_n)$ qui, pourtant, réclamait une justification. De même, à la question Q19, l'écriture $\lambda M J_n X = J_n X$ devenait $M J_n X = \dfrac{1}{\lambda} J_n X$ sans la moindre attention à la non-nullité de λ qui, ici encore, méritait une justification, liée à l'inversibilité de la matrice symplectique M.

- **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées.** Il n'est pas rare de voir apparaitre des X, Y, a, b, α, β au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. De telles pratiques nuisent à la clarté du discours et affaiblissent considérablement le raisonnement, le rendant confus. Le jury attend davantage de rigueur de la part des candidats sur ce plan.

- **La calculatrice étant autorisée,** il est tout à fait pertinent d'y recourir pour les questions numériques (Q25, Q26, Q35, Q36), or une large proportion de candidats n'y pense pas. Parmi ceux qui semblent l'utiliser, très peu sont ceux qui s'en servent pour déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres, comme demandé aux questions Q26 et Q36. Pourtant, nombreuses sont les calculatrices qui le permettent et il pourrait être profitable aux futurs candidats de se familiariser avec de telles fonctionnalités.

- **Inclusion / appartenance.** On voit beaucoup le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).

- **Vecteurs propres.** La notion de vecteur propre comporte une exigence de non-nullité, qui est étonnamment peu vérifiée par les candidats (questions Q19, Q27, Q29).

- **La manipulation des équivalences** doit se faire avec le plus grand soin. *Primo*, l'écriture du symbole « $\Leftrightarrow$ » ne se fait que si les implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ sont vérifiées : moins de la moitié des candidats s'en préoccupent avec soin. *Secundo*, lorsque des questions comme Q2 et Q3 demandent la démonstration d'une équivalence, il faut bien veiller à ce que la réponse s'en occupe. Par exemple, conclure Q2 sur le fait que « M est symplectique si $\det(M) = 1$ », conclusion trouvée dans nombre de copies, ne peut constituer une réponse satisfaisante.

- **En guise de contre-exemples,** les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne principalement la Q18, dans laquelle, pour démontrer l'absence de structure d'espace vectoriel, certains candidats ont choisi $a, b \in \mathbb{R}, M, N$ symplectiques, ont développé le produit $(aM + bN)^\top J_n(aM + bN)$, concluant très vite qu'il était différent de J_n, sans condition sur a, b, simplement parce que la forme trouvée *semblait* différente de J_n. Une telle réponse n'est pas exacte : en particularisant les valeurs de a, b (en particulier si $a = 0$ et $b = 1$), on trouve bien J_n. Le jury recommande aux candidats la plus grande rigueur dans ce genre de raisonnement, en particularisant des valeurs de a, b, voire de M, N, pour aboutir à la conclusion voulue.

- **Le jury recommande aux candidats de rédiger avec honnêteté et humilité** et notamment de bannir de leur vocabulaire des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question Q1, que « J_n est trivialement antisymétrique », ou, à la Q13, que « les colonnes de P sont trivialement orthogonales » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un aspect de la question. À nouveau, cela n'apporte rien et l'impression laissée au lecteur n'est alors pas favorable.

Le jury rappelle également que les **fautes de français**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, même si elles ne sont pas comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. On rappelle ainsi que le nom « théorème » est masculin, ce qui rend incorrecte l'écriture « théorème *spectrale* », pourtant vue dans plus de deux tiers des copies.

Voici maintenant les remarques du jury, question par question.

- **Q1** : question plutôt bien réussie dans l'ensemble. Pour l'aspect antisymétrique, il était attendu au moins une justification sur la structure de la matrice, ou sur le fait que $J_n^\top = -J_n$.

- **Q2** : on note de grosses difficultés sur le maniement des équivalences et beaucoup d'erreurs de raisonnement du type « $\det(M)^2 = 1 \implies \det(M) = 1$ ». Les candidats qui donnent des notations aux coefficients de M et qui se lancent dans le calcul de $M^\top J_1 M$ parviennent en général à répondre correctement.

  Rappelons, car il est visiblement besoin de le faire au vu du nombre inquiétant de copies contenant l'erreur, que $\det(M^\top J_n M) = \det(J_n)$ n'implique pas que $M^\top J_n M = J_n$.

- **Q3** : ici encore, on note d'importantes difficultés dans le maniement des équivalences. Le sens « M symplectique implique $M_2 = -J_1 M_1$ » est celui qui a posé le plus de problèmes, le sens réciproque ayant trouvé plus de succès. La quasi-totalité des réponses satisfaisantes à la question sont obtenues en écrivant que, pour M orthogonale, M symplectique équivaut à $MJ_1 = J_1 M$.

- **Q4** : beaucoup de candidats pensent qu'il suffit que les colonnes d'une matrice de taille 2×2 soient orthogonales pour que la matrice le soit. Or, il s'agit aussi de vérifier que les colonnes sont de norme égale à 1. On regrette également qu'un grand nombre de copies ait fait figurer l'utilisation du résultat de Q3 avant même la vérification du caractère orthogonal de la matrice étudiée (cela a été systématiquement pénalisé). Il parait pourtant fondamental de s'assurer que toutes les hypothèses d'un énoncé sont vérifiées avant d'en invoquer la conclusion.

- **Q5** : le théorème spectral n'est pas systématiquement cité avec tous ses aspects ; certains se contentent de dire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable (alors que l'existence d'une base orthonormée de diagonalisation fait partie des attentes de la question). De manière plus regrettable, on en lit parfois des versions erronées : ce n'est pas parce qu'*on peut* trouver une base orthonormée permettant de diagonaliser une matrice symétrique que *toute* matrice de passage diagonalisante est une matrice orthogonale (confusion fréquente).

  Dans la même veine, la dernière partie de la question, difficile, a été globalement mal comprise : il s'agit de montrer qu'*on peut trouver* une matrice de passage diagonalisante symplectique, et non que *toute* matrice de passage orthogonale diagonalisante est nécessairement symplectique. On aura tout de même trouvé quelques (rares) propositions satisfaisantes sur cet aspect de la question, notamment en jouant sur l'orientation d'une base orthonormée de diagonalisation.

  À noter qu'une proportion inquiétante de candidats confond « inverse » et « opposé ».

- **Q6** : trop de candidats ignorent que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nécessairement nuls. Par ailleurs, la phase de synthèse dans la détermination de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cap S_{p_2}(\mathbb{R})$ est souvent omise. Les candidats se contentent de montrer que toute matrice antisymétrique et symplectique de taille 2×2 est nécessairement J_1 ou $-J_1$, sans se préoccuper de la réciproque (pourtant demandée par la question).

- **Q7** : question très accessible, globalement bien traitée. Les quelques erreurs relevées viennent d'une méconnaissance profonde de la notion d'application linéaire : il ne suffit pas de démontrer que $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour en déduire que u est linéaire. Rappelons par ailleurs qu'il est inutile de montrer que $\varphi(X, 0) = 0$ et $\varphi(0, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ pour parvenir à ses fins.

- **Q8** : une grande proportion de candidats oublie que $\varphi(X, X)$ est un réel, rendant stérile leur calcul, pourtant correct, de $\varphi(X, X)^\top$. Ceux qui, à l'inverse, l'ont bien noté, parviennent généralement à conclure correctement.

- **Q9** : question globalement bien traitée. On a noté quelques fourvoiements dans le calcul de $X^\top J_n$, mais plutôt en faible proportion parmi les candidats.

- **Q10** : peu de candidats ont vu l'intérêt de suivre l'indication donnée, pensant élaborer un raisonnement générique pour $i, j \in [\![1, 2n]\!]$. Or, dans la grande majorité de ces cas, le raisonnement proposé ne fonctionnait en réalité que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, sans que le candidat ne s'en aperçoive. L'incorrection du raisonnement étant subtile, le jury a tout de même tenu à valoriser (partiellement) les réponses proposées dans ce style.

- **Q11** : beaucoup ont malheureusement confondu $\varphi(J_n X, X)$ et $\langle J_n X, X\rangle$. Parmi ceux qui n'ont pas commis cette erreur, on note une grande majorité de réponses satisfaisantes.

- **Q12** : question traitée avec une fortune variable d'une copie à l'autre, principalement à cause de la mauvaise gestion de l'égalité ensembliste. Une seule inclusion ne peut suffire. Quant à l'utilisation d'une éventuelle égalité de dimensions, elle n'est pas pertinente dans cette question.

- **Q13** : les candidats se sont surtout intéressés au caractère orthonormé de la famille des colonnes de P (deux premières conclusions demandées). Le jury a vu très peu de propositions satisfaisantes pour la troisième conclusion attendue (question difficile).

- **Q14** et **Q15** : rarement traitées.

- **Q16** : comme souligné précédemment, face à l'égalité $\det(M^\top)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$, une proportion importante de candidats simplifie par $\det(J_n)$ sans se préoccuper de la non-nullité de cette quantité. Pour ceux qui s'y intéressent, on note beaucoup d'affirmations non justifiées quant à la valeur de $\det(J_n)$ ou l'inversibilité de cette matrice. Ce point n'a pourtant pas été étudié plus tôt dans le sujet.

Le jury a aussi noté de nombreux calculs farfelus de $\det(J_n)$. Entre autres : calcul « par blocs » — qui ne se pratique pas, en général — inversions erronées de lignes ou de colonnes, voire développements hasardeux par rapport à une ligne ou une colonne. Ainsi cette question a suscité assez peu de bonnes réponses prenant en compte à la fois la non-nullité de $\det(J_n)$ et un argument valable pour justifier celle-ci.

- **Q17** : question souvent traitée, plutôt avec succès. Le jury note toutefois beaucoup de copies prétendant (à tort, bien sûr) que « $(M^\top J_n M)^{-1} = (M^\top)^{-1} J_n^{-1} M^{-1}$ ».
- **Q18** : pour la partie concernant la structure de sous-espace vectoriel, beaucoup pensent, à raison, à invoquer l'absence de la matrice nulle. Une proportion non négligeable de réponses, insatisfaisantes, proposent des contre-exemples de combinaisons linéaires non symplectiques insuffisamment précis.
- **Q19** : le calcul de $M^\top J_n M X$, où X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, est une bonne idée qui a été trouvée en proportion importante dans les copies. Toutefois, très peu pensent à vérifier la non-nullité de λ au moment d'écrire que $M J_n X = \dfrac{1}{\lambda} J_n X$, et encore moins à vérifier (en le justifiant correctement) que $J_n X \neq 0$ au moment de conclure qu'il s'agit d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Pourtant, un vecteur propre doit être non nul pour être considéré comme tel.
- **Q20** : question plutôt difficile, qui a été très peu réussie. Une erreur, vraiment regrettable, est malheureusement répandue : « puisque $J_n(a_1X_1+\dots+a_pX_p) = 0$, alors $a_1X_1+\dots+a_pX_p = 0$ *car J_n est non nulle* » là où on attendait évidemment un argument d'inversibilité. Beaucoup prétendent, sur une bonne intuition, que « J_n est bijective de E_λ sur $E_{1/\lambda}$ », ce qui n'a pas vraiment de sens et qui aurait gagné à être remplacé par « l'application $X \mapsto J_n X$ induit une bijection de E_λ sur $E_{1/\lambda}$ ». Ce genre d'affirmation appelle par ailleurs une justification qui n'a pas toujours été apportée.

  Le jury a également noté beaucoup de raisonnements formulés ainsi, « J_n est inversible donc *envoie une base sur une base* », sans aucune précision des espaces concernés, alors que là est toute la substance de la question.
- **Q21** : il semble que beaucoup de candidats n'ont pas remarqué le « Y » figurant au milieu de l'écriture « $(\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, Y, J_nY_1,))^\perp$ » et n'ont traité que la question de l'orthogonalité aux Y_i et aux J_nY_i. Beaucoup de tentatives plutôt heureuses sur cette question.
- **Q22** : question difficile, très peu réussie et peu comprise. L'erreur selon laquelle en concaténant deux familles libres de E_1 on obtient une base de E_1 apparait de manière répétée.
- **Q24** : question difficile, peu comprise, et réussie uniquement par les tout meilleurs candidats.
- **Q25** et **Q26** ces questions peuvent être traitées à l'aide de la calculatrice (cf. remarque générale, plus haut). Beaucoup de tentatives pour la Q25, avec parfois des propositions surprenantes pour le résultat de la multiplication 8×8, plus rares pour la Q26 (pour quelques bonnes réponses, parmi les meilleures copies).
- **Q27** : question beaucoup tentée, peu réussie. Les bonnes propositions s'appuyent sur un raisonnement par l'absurde construit sur le calcul de $\langle X, MX\rangle$ ou de $\bar{X}^\top MX$.
- **Q28** : la référence au résultat de la partie précédente est apparue à presque tous, mais peu ont pensé à vérifier la totalité des conditions de son application. Comme en Q4, il ne faut pas négliger la moitié des hypothèses lorsqu'on invoque un résultat précédemment établi dans le sujet.

- **Q29** : question très peu traitée intégralement, la plupart des candidats se contentant d'étudier MX. Même parmi les réponses se rapprochant d'une réponse correcte, le jury n'a vu qu'extrêmement rarement une vérification de la non-nullité des vecteurs proposés et pourtant, à nouveau, un vecteur propre se doit d'être non nul.
- **Q30** : pour un bon nombre de tentatives, peu de candidats se sont consacrés sérieusement à l'appartenance de MJ_nX à F.
- **Q31** à **Q34** : questions très peu traitées. La Q34 était difficile, mais le jury a tout de même trouvé quelques réponses correctes (moins de 10).
- **Q35** et **Q36** : ici encore, la calculatrice est utilisable. Les commentaires sont les mêmes que pour les questions Q25 et Q26.

Conclusion

Il est absolument primordial de veiller à la rigueur du raisonnement, en particulier sur ce qui semble être considéré par de nombreux candidats, à tort, comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison, justification de la non-nullité d'une quantité avant simplification. Il importe également que le candidat vérifie la totalité des hypothèses nécessaires avant utilisation d'un résultat précédemment établi, cela est très loin d'être systématique parmi les copies. Le correcteur, contrairement à l'examinateur à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ou de les compléter ; il faut donc que tout soit exprimé sur la copie. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses auront été incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page et d'écrire dans un francais correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, comme souvent, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies auront, presque sans exception, été de cette espèce.