

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet a pour objectif principal l'étude de probabilités dans le cadre de la gestion d'erreurs d'un processus automatisé. Ce problème est constitué de trois grandes parties :

- une première partie où on étudie un cas particulier lié à la loi de Poisson ;
- une deuxième partie visant à démontrer partiellement le théorème de Perron-Frobenius ;
- une troisième partie qui propose un résultat intéressant sur les chaînes de Markov.

L'étude des chaînes de Markov a joué une place importante en mathématiques au vingtième siècle et apparaît désormais régulièrement dans les exercices et problèmes en CPGE.

Une bonne maîtrise du chapitre sur les probabilités et les variables aléatoires discrètes est indispensable pour traiter correctement ce sujet. Il est également attendu des candidats qu'ils maîtrisent les rudiments de réduction des matrices (définition des éléments propres, théorèmes de diagonalisabilité ou trigonalisabilité). Enfin, quelques autres chapitres (suites numériques, séries de fonctions, calcul asymptotique...) entrent également en jeu.

Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats et certaines questions ont été très bien traitées. En revanche, le cours n'est pas toujours bien appris et certains résultats, pourtant très importants, ne sont pas cités correctement (propriétés d'une fonction génératrice, formule de Stirling, utilisation du théorème de la double limite...).

La deuxième partie a aussi été très largement traitée mais avec moins de succès. Beaucoup de très bonnes réponses ont été proposées, mais la rigueur mathématique était parfois absente dans les explications : par exemple, la notion de matrice positive (pourtant donnée dans l'énoncé) n'a pas toujours été bien comprise.

La troisième partie a été moins abordée, sans doute à cause de sa position en fin de problème, mais aussi car elle demandait d'avoir bien assimilé les résultats de la deuxième partie. Il est dommage que peu de candidats aient pu répondre de manière correcte aux questions d'informatique, qui étaient pourtant assez classiques.

Une majorité de copies est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (FPT pour formule des probabilités totales...) le sont nettement moins.

- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet), les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu’une question propose de démontrer une formule qui est proposée, il ne s’agit pas simplement de recopier la dite formule : un minimum de justifications est attendu !
- Les questions doivent être lues avec plus d’attention : par exemple, la question « montrer qu’il existe un unique... » ne demande pas seulement de prouver une existence.
- Il est important de bien faire la différence entre une variable aléatoire et un évènement. Dans de trop nombreuses copies, on pouvait malheureusement lire des expressions du genre $P(X)$ qui n’ont aucun sens.
- Quelques candidats éprouvent le besoin de redémontrer que la série génératrice d’une somme de deux variables indépendantes est le produit de leurs séries génératrices. C’est un résultat explicitement au programme qui peut être utilisé directement (sauf demande explicite du sujet).
- Dans la question 7, trop de candidats se contentent de majorer $u_k(x)$ sans envisager sa valeur absolue et ni mentionner le signe de cette quantité. Dans cette même question, on note de nombreuses confusions sur les notions et le vocabulaire relatifs aux séries de fonctions : par exemple, on peut lire des phrases comme « la série $\sum u_k/n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ » ou encore « la série u_k converge normalement ».
- Dans la question 8, il convient de noter que la série $\sum \left(\frac{1}{1+kx}\right)^k$ n’est pas géométrique dès que x est non nul.
- Dans la question 13, trop de candidats semblent confondre les assertions « admettre 0 pour seule valeur propre » et « admettre 0 pour valeur propre ». De même, il faut bien se rappeler que si P est un polynôme annulateur d’une matrice A , on a en général, seulement l’inclusion du spectre de A dans l’ensemble des racines de P .
- Dans la question 24, de très nombreux candidats écrivent des inégalités sur des valeurs propres qui sont pourtant a priori des nombres complexes. L’énoncé prenait pourtant bien la peine de préciser que les matrices considérées, même si à coefficients réels, n’étaient supposées diagonalisables que sur \mathbb{C} .
- Dans la question 36, l’hypothèse cruciale de positivité de la variable aléatoire à laquelle on applique l’inégalité de Markov est trop souvent omise.

Conclusion

Le sujet est plutôt long mais la progressivité du texte et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (probabilités, suites, séries de fonctions, réduction...), ont permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maîtrise du langage mathématique en général et, plus spécifiquement, des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : le langage des probabilités, l’utilisation des séries génératrices, la formule des probabilités totales ; en analyse, les théorèmes centraux sur les séries de fonctions, des éléments d’analyse asymptotique ; en algèbre, la définition du produit matriciel, la notion de polynôme annulateur et le théorème de Cayley-Hamilton, la similitude matricielle, la notion de diagonalisabilité. Quelques candidats ont abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs encouragent vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées. De même, quelques exemples simples vus tout au long de l'année donneraient aux candidats des idées élémentaires permettant de comprendre de nombreuses questions et d'en mesurer la difficulté.