CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI **2022**

4 heures — Calculatrice autorisée

Notations

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n la matrice identité d'ordre n à coefficients réels et 0_n la matrice nulle d'ordre n.

$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A\,A^n. \end{cases}$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n \end{pmatrix}.$$

On note $\left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}\right.$ la fonction exponentielle réelle.

Objectif

L'objectif de ce problème est d'étudier des extensions de cette fonction à différents ensembles et d'en traiter quelques applications.

Il est demandé aux candidats de mentionner clairement les résultats qu'ils utilisent pour répondre aux différentes questions du problème.

I L'exponentielle réelle

I.A – Une équation fonctionnelle

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(1) = \mathrm{e}, \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases} \tag{I.1}$$

Q 1. Justifier que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de (I.1).

On se propose de démontrer que c'est la seule solution.

Pour cela, on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (I.1).

Q 2. Pour tout nombre réel x, calculer $f(x)f(1-x)$.

Q 3. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puis que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Démontrer que $f(0) = 1$.

Q 5. Justifier que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad f'(s+t) = f'(s)f(t).$$

Q 6. En donnant à s une valeur bien choisie, démontrer qu'il existe une constante k réelle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = k\mathrm{e}^{f'(0)t}.$$

Q 7. Déterminer les valeurs de k et de $f'(0)$ et justifier que f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = y(t). \end{cases} \tag{I.2}$$

Q 8. En déduire que le problème (I.1) a une solution unique que l'on donnera.

Q 9. Donner le développement en série entière en 0 de cette solution et préciser le rayon de convergence de la série entière.

I.B – Un problème de probabilité faisant intervenir l'exponentielle réelle

Q 10. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x$ et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \mathrm{e}^{-x} > 1 - x.$$

Dans cette sous-partie, θ et α sont deux nombres réels strictement positifs et on pose

$$p = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}.$$

Q 11. Justifier que $p \in]0, 1[$.

On pose $q = 1 - p$.

Un service d'urgences médicales de capacité supposée illimitée reçoit des patients entre l'instant 0 et l'instant θ inclus. On modélise le nombre de patients arrivés dans le service au cours de l'intervalle de temps $[0, \theta]$ par une variable aléatoire N_θ suivant la loi de Poisson de paramètre θ.

On rappelle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N_\theta = k) = \dfrac{\theta^k}{k!}\mathrm{e}^{-\theta}$.

On suppose par ailleurs qu'un patient arrivé dans le service entre les instants 0 et θ a la probabilité p d'être toujours présent dans le service au-delà de l'instant θ. On fait l'hypothèse que les instants aléatoires de sortie des urgences sont mutuellement indépendants. On note R_θ le nombre de patients arrivés entre les instants 0 et θ qui sont encore présents dans le service au-delà de l'instant θ.

Q 12. Pour $(s, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}\big((R_\theta = k) \mid (N_\theta = s)\big)$, probabilité conditionnelle de $(R_\theta = k)$ sachant $(N_\theta = s)$. On distinguera les cas $k \leqslant s$ et $k > s$.

Q 13. Pour tous entiers s et k tels que $k \leqslant s$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big(R_\theta = k) \cap (N_\theta = s)\big) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}(p\theta)^k(q\theta)^{s-k}}{k!\,(s-k)!}.$$

Q 14. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbb{P}(R_\theta = k)$ en fonction de k, p et θ.

Q 15. Reconnaitre la loi de probabilité de R_θ et donner la valeur de son espérance $\mathbb{E}(R_\theta)$.

II Forme exponentielle des fonctions trigonométriques

On rappelle que l'exponentielle est définie sur l'ensemble des nombre imaginaires purs par l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t).$$

Dans le plan complexe, on considère la courbe paramétrée Γ formée par l'ensemble des points $M(t)$ d'affixe

$$z(t) = \frac{1}{3}\big(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\big),$$

où t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$. Le point $M(t_0)$ est dit stationnaire si $z'(t_0) = 0$.

Q 16. Pour tout nombre réel t, exprimer en fonction de $z(t)$ les nombres $z(t + 2\pi)$ et $z(-t)$.

Q 17. En déduire un intervalle de la forme $[0, \gamma]$ (avec $0 < \gamma < 2\pi$) et une transformation géométrique simple permettant d'obtenir la courbe Γ toute entière à partir de sa restriction à l'intervalle $[0, \gamma]$.

Q 18. Déterminer trois nombres réels $t_1 < t_2 < t_3$ appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ tels que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont des points stationnaires de Γ.

Q 19. Préciser la nature du triangle formé par ces trois points.

Q 20. Pour tout nombre réel t, exprimer $z\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de $z(t)$.

Q 21. En déduire une transformation géométrique laissant globalement invariante la courbe Γ.

Q 22. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sur un intervalle bien choisi. On admet que la tangente au point stationnaire $M(t_2)$ est l'axe des abscisses. En déduire les tangentes aux points $M(t_1)$ et $M(t_3)$, puis tracer la courbe Γ.

Q 23. Calculer la longueur de la courbe Γ.

III Exponentielles de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et est orienté par la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

III.A – On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Q 24. Démontrer que $F_1 = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $F_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires. Préciser un vecteur directeur u_1 de F_1 et un vecteur directeur u_2 de F_2.

On note q_1 le projecteur sur la droite F_1 parallèlement à la droite F_2 et q_2 le projecteur sur la droite F_2 parallèlement à la droite F_1.

Q 25. Déterminer la matrice Q_1 de l'endomorphisme q_1 dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice Q_2 de l'endomorphisme q_2 dans cette même base.

Q 26. Justifier les égalités

$$Q_1^2 = Q_1, \qquad Q_2^2 = Q_2, \qquad Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0_2, \qquad Q_1 + Q_2 = I_2 \qquad \text{et} \qquad A = Q_1 + 2Q_2.$$

Q 27. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$.

Q 28. Donner les développements en série entière au voisinage de zéro des fonction cosinus et sinus.

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel t, on note $E_n(t)$ la matrice $E_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} A^k$.

Q 29. Pour tout nombre réel t, justifier que la suite $\big(E_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $E(t) = \mathrm{e}^t Q_1 + \mathrm{e}^{2t} Q_2$.

Q 30. En déduire que

$$\begin{cases} E(0) = I_2, & \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, & E(t+s) = E(t)E(s), \\ \forall t \in \mathbb{R}, & E'(t) = AE(t). \end{cases}$$

Q 31. Justifier la notation $E(t) = \mathrm{e}^{tA}$, valable pour tout nombre réel t.

III.B – On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 32. Identifier géométriquement l'endomorphisme g.

Q 33. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer B^{2n} et B^{2n+1} en fonction de n, I_2 et B.

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel t, on note $R_n(t)$ la matrice $R_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} B^k$ et on l'écrit sous la forme

$$R_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & \beta_n(t) \\ \gamma_n(t) & \delta_n(t) \end{pmatrix}.$$

Q 34. Démontrer que les quatre suites $\big(\alpha_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\beta_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\gamma_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\delta_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On pourra considérer les suites extraites $(R_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On note alors $R(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(t)$.

Q 35. Identifier géométriquement la matrice $R(t)$ et donner ses éléments caractéristiques.

IV Un système différentiel

Dans cette partie, on identifie tout élément u de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne associée.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 36. Déterminer le rang de la matrice $A - I_3$ et démontrer que les deux vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\ker(A - I_3)$.

Q 37. Déterminer le rang de la matrice $A + I_3$ et démontrer que le vecteur

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de $\ker(A + I_3)$.

Q 38. Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 39. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Q 40. Résoudre le système différentiel linéaire

$$X'(t) = AX(t) \tag{IV.1}$$

où la variable t est réelle et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

On pourra poser $X(t) = PY(t)$ où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

On rappelle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution X de (IV.1) vérifiant

$$X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Q 41. Déterminer une fonction

$$\left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ t & \to & M(t) \end{array} \right.$$

telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = M(t) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On pourrait démontrer, ce qui n'est pas demandé dans le cadre de ce problème, que, pour tout nombre réel t, $M(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

• • • FIN • • •