Mathématiques 2

PC

2024

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

— La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.

— La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.

— La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.

— La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

— Enfin, la partie V étudie la fonction Γ. Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

I Résultats préliminaires

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 1. Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

Q 2. Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

I.B – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^z.

Q 3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\left|(1 + t) - \mathrm{e}^t\right| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}.$$

Q 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.

Q 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.

Q 6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^z.

II Exemples de calcul de produit infini

II.A – **Q 7.** Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et de $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \mathrm{d}u.$$

Q 8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q 9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

II.C – On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\prod_{p=n}^{+\infty}\big(1-\mathbb{P}(A_p)\big) = 0$.

On pourra utiliser l'inégalité démontrée en Q 2.

Q 11. En déduire que $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$.

III Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

— a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.

— $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous condition d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

III.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

Q 12. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

Q 13. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Q 14. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

Q 15. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

III.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

Q 16. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 17. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

— la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

— la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = P_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}.$$

Q 19. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

IV Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(1+\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

Dans les questions Q20 à Q23, on fixe un entier naturel n.

Q 20. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Q 21. Pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \mid k \in [\![0,2n]\!]\}$.

Q 22. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Q 23. En calculant $P_n'(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Q 24. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

IV.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} x\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) & \text{si } t \geqslant k \\ P_{\lfloor t\rfloor}(x) & \text{si } t < k. \end{cases} \end{cases}$$

Q 25. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|.$$

Q 26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|v_k(t)| \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Q 27. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2}(v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k(t)$.

Q 29. En déduire que :

$$\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

IV.C –

Q 30. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}.$$

Q 31. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pourra dans un premier temps déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2\sin(x)}$.

V Autour de la fonction Γ

V.A – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Q 32. Montrer que Γ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u.$$

Q 33. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

Q 34. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

Q 35. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$.

V.B – **Q 36.** Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

V.C – **Q 37.** Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Q 38. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

• • • FIN • • •