Mathématiques 1

TSI

2024

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Dans tout ce sujet, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n (n entier). Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et $P^{(j)}$ le polynôme dérivé d'ordre j de P de telle sorte que $P = P^{(0)}$, $P' = P^{(1)}$, $P'' = P^{(2)}$, etc.

On pourra confondre un polynôme et sa fonction polynomiale associée. De même, on pourra confondre le polynôme dérivé P' avec la fonction dérivée de la fonction polynomiale P.

On rappelle également que la partie entière d'un réel x est un entier, noté $\lfloor x \rfloor$, et que celle-ci vérifie la double inégalité $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

I Préliminaires

On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $G_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, G_{n+1} = X \left(G_n + (1+X)G_n'\right).$$

Q 1. Justifier que $G_1 = X$ puis donner la forme développée du polynôme G_2.

Q 2. Donner sans justification le rayon de convergence R_0 de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ et exprimer sa fonction somme, notée D_0, à l'aide des fonctions usuelles.

Pour tout entier naturel non nul n, on note R_n le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^n x^k$ et on note $D_n :]-R_n, R_n[\to \mathbb{R}$ sa fonction somme donnée par $D_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^n x^k$.

Q 3. Justifier que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire la valeur de R_n pour tout entier naturel n.

Q 4. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in]-R_n, R_n[$, on a $D_{n+1}(x) = xD_n'(x)$.

Q 5. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout $x \in]-R_n, R_n[$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{1-x} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

II Nombres de Fubini

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k.$$

II.A – Dénombrement

Q 6. Justifier que $F_1 = 1$ et déterminer les entiers F_2 et F_3.

On rappelle qu'une partition d'un ensemble E non vide est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion constitue l'ensemble de départ E. Une partition ordonnée de E est un p-uplet $\left(X_1, \dots, X_p\right)$ tel que $\left\{X_1, \dots, X_p\right\}$ est une partition de E.

Par exemple, les trois partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, 2\}$ sont $(\{1\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$.

Par convention, on pose qu'il existe une seule partition ordonnée de l'ensemble vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Q 7. Déterminer les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, puis leur nombre.

Q 8. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}$. En conclure que les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales. Pour construire une partition ordonnée, on pourra commencer par choisir le cardinal de la première partie formant cette partition.

II.B – Majoration des nombres de Fubini

Q 9. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle avec son domaine de validité et justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leqslant 1$ pour tout entier naturel n non nul.

On se propose de prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}$. Pour cela, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété ci-après qui implique l'encadrement voulu :

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0, n]\!]\,, 0 \leqslant \frac{F_k}{k!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^k}.$$

Q 10. Justifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Q 11. On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour un certain entier n naturel non nul fixé. Montrer que $0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}$ et en conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le résultat de cette question achève la récurrence et prouve l'encadrement de $\frac{F_n}{n!}$ annoncé.

Q 12. En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} z^n$.

II.C – Interprétation probabiliste et minoration des nombres de Fubini

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

On peut montrer que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que ses dérivées successives s'expriment à l'aide des polynômes G_n définis dans la partie Préliminaires sous la forme :

$$\forall x \in]-R, R[, f^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{2e^{-x} - 1}\right) f(x).$$

On pourra librement utiliser cette expression admise de $f^{(n)}$ valable pour tout entier naturel n.

Q 13. Rappeler le lien existant entre les dérivées successives de f et les coefficients de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} x^n$ puis prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} \tag{II.1}$$

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g_n : t \mapsto t^n e^{-t \ln 2}.$$

Q 14. Rappeler quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et rappeler la valeur de $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Q 15. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que X^n est d'espérance finie puis que $E(X^n) = 2F_n$ en citant le nom du théorème utilisé.

Q 16. Soit a un réel strictement positif que l'on suppose non entier. Montrer que $P(X \geqslant a) = \dfrac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}$.

Q 17. Pour n non nul, justifier que g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$, noté M_n, que l'on explicitera.

Q 18. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $E(X^n) \geqslant a^n P(X \geqslant a)$ pour tout réel a strictement positif.

Q 19. En déduire la minoration $F_n \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{e \ln 2}\right)^n$ On pourra admettre que $\ln 2$ n'est pas un nombre rationnel.

III Équivalent de F_n

On rappelle que la fonction g_n a été définie dans la partie II.C pour tout entier naturel n par

$$g_n : \begin{cases} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n e^{-t \ln 2} \end{cases}$$

et que quelques résultats la concernant, qui peuvent directement être réinvestis, ont déjà été établis dans la question 17.

III.A – Valeur d'une intégrale

Q 20. Pour tout entier naturel n, justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et, à l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

Q 21. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$ pour tout entier naturel n.

III.B – Comparaison série/intégrale

Dans toute la suite de cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Q 22. Justifier qu'il existe un entier $N \geqslant 1$, dépendant de n tel que g_n est croissante sur $[0, N]$ et décroissante sur $[N+1, +\infty[$.

Q 23. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) \leqslant \int_0^N g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{N} g_n(k)$.

Q 24. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant N+1}^{+\infty} g_n(k)$ converge puis établir l'encadrement

$$\sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k) \leqslant \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k).$$

Q 25. En utilisant la relation (II.1), déduire des encadrements précédents que

$$-\int_N^{N+1} g_n(t)dt \leqslant 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leqslant g_n(N) + g_n(N+1) - \int_N^{N+1} g_n(t)dt.$$

Q 26. Justifier que $-\dfrac{M_n}{2} \leqslant F_n - \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leqslant M_n$ pour tout entier naturel non nul puis en déduire l'équivalent de $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}$. On pourra utiliser librement la formule de Stirling qui donne l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

IV Une suite d'Appell

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, noté parfois également $P(X)$, on note $P(X+1)$ le polynôme obtenu en substituant l'indéterminée X de P par $X+1$.

À titre d'exemple, si $P(X) = X^2 - 3X + 7$ alors $P(X+1) = (X+1)^2 - 3(X+1) + 7 = X^2 - X + 5$. On pourra admettre que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, les polynômes P et $P(X+1)$ ont le même degré et le même coefficient dominant.

Dans toute cette partie, on considère un entier naturel n fixé.

IV.A – Étude d'un endomorphisme

On note φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi_n : P \mapsto 2P(X) - P(X+1)$.

Q 27. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 28. Montrer que si λ est une valeur propre de φ_n alors $\lambda = 1$ (on pourra utiliser un vecteur propre associé à la valeur propre λ). En déduire que φ_n est injectif.

Q 29. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?

Q 30. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$. Dans toute la suite du problème, on note P_n cet unique polynôme.

IV.B – Premières propriétés

On rappelle que, par définition, le polynôme P_n vérifie $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$.

Q 31. Justifier que $\deg P_n = n$.

Q 32. Justifier que $\frac{k^n}{2^k} = \frac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \frac{P_n(k+1)}{2^k}$ pour tout entier naturel k et en déduire que $P_n(0) = F_n$.

Q 33. Montrer que $P'_{n+1} = (n+1)P_n$.

Q 34. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} X^k. \tag{IV.1}$$

IV.C – Structure euclidienne

L'endomorphisme φ_n est celui défini dans la partie IV.A. Dans toute la suite, pour des polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1))(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1))}{(j!)^2}.$$

Q 35. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Justifier qu'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$.

Q 36. Justifier que $\varphi_n\left(P^{(j)}\right) = (\varphi_n(P))^{(j)}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout entier naturel j puis montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 37. Justifier que

$$2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ k! & \text{si } j = k \end{cases}$$

pour tout couple d'entiers naturels (j, k) puis montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

Q 38. En déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!} P_k.$$

Les entiers F_n définis dans ce problème sont appelés nombres de Fubini ou nombres de Bell ordonnés et apparaissent dans des problèmes de combinatoire. La suite (P_n) de polynômes définie à partir de ces nombres vérifie des propriétés communes avec d'autres suites de polynômes (polynômes de Bernoulli, polynômes d'Hermite...) qui sont à l'origine de la notion de suites d'Appell.

• • • FIN • • •
