CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

*Oral*

# Mathématiques 1

# MP

On considère une série entière complexe $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

On note $f$ sa somme définie pour $|z| < R$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r\}$ si $0 < r < R$.

2. Soit $r$ un réel tel que $0 < r < R$, montrer que la fonction

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))}{r - ze^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

   est développable en série entière et exprimer la somme de cette série entière en fonction de $f(z)$ et de $f(0)$.

3. Déterminer les fonctions $f$, développables en série entière sur $D(0,R)$ et qui ne prennent que des valeurs réelles sur un ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = r\}$, pour $0 < r < R$.