Pour n entier, on pose

$$S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos(n\frac{\pi}{4})$$

1. Programmer une fonction `binom(n,k)` qui calcule le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$.
2. Programmer une fonction `Sn(n)` qui calcule le terme S_n.
3. Afficher simultanément les termes des suites $(S_n)_{n\in[0,10]}$ et $(T_n)_{n\in[0,10]}$.

   Que constate-t-on ?
4. Rappeler les développements en série entière et les rayons de convergence des fonctions cos et exp.
5. En déduire que la fonction $x \mapsto \cos(x)\, e^x$ est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
6. En utilisant ce qui précède, démontrer le résultat observé à la question 3.
7. Proposer une nouvelle démonstration sans passer par l'usage de séries entières.
8. Déterminer une formule simple pour le calcul de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$ avec n entier.

   La vérifier par simulation.