



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

Oral

PSI

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on pose $P_n = \frac{X^n(a - bX)^n}{n!}$.

1. On pose $I_n = \int_0^{a/b} e^x P_n(x) dx$, montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont des entiers relatifs.
3. On suppose que $e^{a/b}$ est un rationnel de dénominateur d . Montrer que dI_n est dans \mathbb{Z} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Quels sont les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $e^r \in \mathbb{Q}$?