



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

Oral

MP

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

On note  $\chi$  le polynôme caractéristique de  $u$ .

1. Soient  $V$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $u$  et tels que  $E = V \oplus W$ . On note  $\chi'$  le polynôme caractéristique de  $u|_V$  et  $\chi''$  celui de  $u|_W$ .

Montrer que  $\chi = \chi' \chi''$ .

2. On considère la décomposition en facteurs irréductibles de  $\chi = \prod_i P_i^{\alpha_i}$ .

Montrer que pour tout  $i$ ,  $\dim \ker P_i^{\alpha_i}(u) = \alpha_i \deg P_i$ .

3. Montrer que le polynôme minimal de  $u$  est égal à  $\chi$  si et seulement si pour tout  $i$ , pour tout  $k \leq \alpha_i$ ,  $\dim \ker P_i^k(u) = k \deg P_i$ .