## *Énoncé*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $2\pi$-périodique et ne s'annule pas, on pose

$$I(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Énoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètre, dans le cas d'une intégration sur un segment $[a, b]$.

2. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $2\pi$-périodique et ne s'annule pas, démontrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

3. Déduire de la **question 2** une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss (après l'avoir énoncé).

## *Indications fournies aux candidats lors de l'épreuve*

### Question 2

Si $f$ était à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on pourrait écrire

$$I(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \Big[\ln(f(t))\Big]_0^{2\pi}$$

Dans le cas général, on pense à contourner le logarithme et à considérer $\exp \displaystyle\int_0^t \frac{f'}{f}$.

### Question 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Supposons que $P$ n'ait pas de racine. Considérer $r \in \mathbb{R}_+^* \mapsto I(P_r)$ où $P_r(t) = P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Que penser de la limite de $I(P_r)$ quand $r$ tend vers $+\infty$ ?