



Polariseur à neutrons

Données

charge du proton	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
masse de l'électron	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
masse d'un nucléon	$m_p = m_n = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

On rappelle que l'énergie potentielle d'un système ayant un moment magnétique \vec{M} , placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ est donnée par : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

- À propos du moment magnétique d'une particule élémentaire
 - Dans un modèle classique de l'atome d'hydrogène, où l'électron décrit une orbite circulaire centrée sur le noyau, montrer que le moment magnétique orbitalaire \vec{M} de l'électron est proportionnel à son moment cinétique orbitalaire \vec{L} . On posera $\vec{M} = \gamma_0 \vec{L}$.

Établir l'expression de γ_0 en fonction de m_e et e et donner sa valeur.

- On peut montrer que l'électron, ainsi que les nucléons, possèdent un moment cinétique intrinsèque, le spin \vec{S} où $S = \|\vec{S}\| = \hbar/2$ et que la relation reliant le moment magnétique intrinsèque au moment cinétique intrinsèque se met sous la forme $\vec{M} = -g\gamma_0 \frac{m_e}{m} \vec{S} = \gamma \vec{S}$ où m est la masse de la particule, $g = -2$ pour l'électron, $g = 5,59$ pour le proton et $g = -3,83$ pour le neutron.

La projection du spin \vec{S} suivant \vec{u}_z ne peut prendre que deux valeurs $\hbar/2$ (polarisation positive) ou $-\hbar/2$ (polarisation négative).

Comment se comportent les neutrons dans un champ magnétique constant ?

- On considère un faisceau dont tous les neutrons possèdent la même énergie et dans lequel 50% des neutrons ont une polarisation positive et 50% une polarisation négative.

Ce faisceau est émis par une source située dans le vide en $x \rightarrow -\infty$, il se dirige vers un milieu (en $x > 0$) où règne un potentiel constant $V_0 > 0$ ainsi qu'un champ magnétique constant et uniforme. Le champ magnétique constant définit une direction Oz . On souhaite polariser le faisceau de neutrons, c'est-à-dire l'enrichir en un des deux états de polarisation.

On posera $\omega_L = |\gamma|B$ et on notera E l'énergie totale du neutron.

- Donner l'expression de l'énergie potentielle totale $V(x)$ pour chacun des deux états de polarisation du neutron. Représenter l'allure de $V(x)$. En vous servant uniquement des lois de la mécanique classique discuter de la possibilité de polariser le faisceau.
- Étude quantique
 - Vous disposez d'une application permettant de simuler le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger. Expliquer en vous servant du logiciel fourni comment il serait possible de polariser le faisceau de neutrons.

ii. Étude théorique

Pour une particule de masse m soumise à une énergie potentielle $V(x)$ et se déplaçant sur un axe (Ox) , l'équation de Schrödinger est :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$$

Nous allons chercher les solutions stationnaires $\varphi(x)$ de l'équation de Schrödinger.

▷ Montrer que $\varphi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Nous admettrons que E est l'énergie de la particule.

▷ Écrire les équations de Schrödinger indépendantes du temps associées à chaque état de polarisation du neutron.

▷ On pose $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, $G = k^2 - k_0^2 + \frac{m\omega_L}{\hbar}$ et $F = k^2 - k_0^2 - \frac{m\omega_L}{\hbar}$.

Nous supposons $F < 0 < G$ réalisée pour la suite de l'exercice.

Justifier la pertinence de ce choix en vous aidant du logiciel.

Quel état de polarisation est transmis ?

▷ En sachant que $\varphi(x)$ et sa dérivée $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ sont continues et que la densité de courant de probabilité associée à une fonction d'onde $\psi(x, t)$ ayant pour vecteur d'onde \vec{k}_0 est donnée par le vecteur $\vec{J} = |\psi(x, t)|^2 \frac{\hbar}{m} \vec{k}_0$ déterminer les coefficients de probabilité de réflexion R et de transmission T du spin transmis. Quelle relation simple existe-il entre R et T ?

iii. Dans la pratique l'énergie d'un neutron, ainsi que V_0 , valent environ 10^{-3} eV et le champ magnétique environ 1 T. Estimer le taux de polarisation du faisceau transmis. Le taux de polarisation étant le rapport entre le nombre de neutrons polarisés transmis par le milieu et le nombre de neutrons incidents.