1. On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

2. a. Vérifier avec le logiciel la relation

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

   b. Démontrer avec rigueur le résultat.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est 1.

   On note f sa somme sur $]-1,1[$.

4. a. Faire un tracé de f avec le logiciel et vérifier que

   $$f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

   b. Démontrer avec rigueur le résultat.

5. a. Faire un tracé de f' avec le logiciel et vérifier que f' admet une limite en 1.

   b. Démontrer avec rigueur le résultat.

