



Ce problème aborde l'étude de solutions exactes ou approchées d'équations et systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ainsi que des méthodes de calcul numérique de solutions approchées de ces équations.

La première partie s'intéresse à la résolution exacte des équations différentielles qui modélisent la charge et la décharge d'un condensateur. La deuxième partie présente la méthode d'Euler pour approcher la solution d'une équation différentielle correspondant à la décharge d'un condensateur ; les notions de convergence, de consistance et de stabilité de cette méthode y sont abordées. La troisième partie aborde la résolution exacte et approchée d'un système différentiel linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Les trois parties sont largement indépendantes les unes des autres.

On note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes à coefficients réels comprenant 2 lignes. On identifie \mathbb{R}^2 et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: un vecteur de \mathbb{R}^2 est représenté par une matrice colonne à deux lignes. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. L'ensemble $O_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales.

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de \mathbb{R}^2 et si on note $u_{1,n}$ et $u_{2,n}$ les coordonnées du terme général U_n dans une base donnée de \mathbb{R}^2 , on dit que la suite (U_n) est bornée dans \mathbb{R}^2 si les suites $(u_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées dans \mathbb{R} . On admet que le caractère borné d'une suite à valeurs dans \mathbb{R}^2 ne dépend pas du choix de la base.

Avec les mêmes notations, on dit que la suite (U_n) est convergente dans \mathbb{R}^2 si les suites $(u_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes dans \mathbb{R} . On admet que le caractère convergent d'une suite à valeurs dans \mathbb{R}^2 ne dépend pas du choix de la base.

I Décharge et charge d'un condensateur

On considère un condensateur de capacité C , deux résistances R identiques et une force électromotrice qui délivre une tension constante U , connectés suivant le schéma de la figure 1. On suppose que le condensateur est chargé sous la différence de potentiel $u_0 > 0$ et que les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont ouverts. À l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K_2 . La tension u aux bornes du condensateur au cours du processus de décharge vérifie l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) \quad (\text{I.1})$$

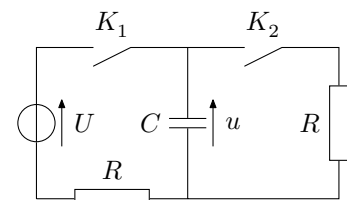


Figure 1

Le réel $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.

I.A –

Q 1. Rappeler la forme des solutions de l'équation (I.1).

La fonction u est désormais l'unique solution de l'équation (I.1) telle que $u(0) = u_0$.

Q 2. Exprimer en fonction de τ l'instant t_1 à partir duquel la tension $u(t)$ devient inférieure à 10% de sa valeur initiale u_0 .

I.B – À l'instant t_1 , on ouvre l'interrupteur K_2 et on ferme l'interrupteur K_1 simultanément. La tension u aux bornes du condensateur vérifie alors :

$$\forall t \geq t_1, \quad u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) + \frac{U}{\tau} \quad (\text{I.2})$$

Q 3. Exprimer la valeur de $u(t)$ pour $t \geq t_1$. (On rappelle que $u(t_1) = u_0/10$.)

Q 4. Étudier les variations de la fonction $t \mapsto u(t)$ sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . On distinguera les cas $U < u_0/10$, $U = u_0/10$ et $U > u_0/10$ et on précisera les dérivées à droite et à gauche de u en t_1 , ainsi que la limite de la fonction u en $+\infty$.

Q 5. Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction $t \mapsto u(t)$ sur l'intervalle \mathbb{R}_+ dans chacun des trois cas distingués à la question précédente.

I.C – On suppose toujours qu'à l'instant t_1 on ouvre l'interrupteur K_2 et on ferme l'interrupteur K_1 simultanément. L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur à l'instant $t_0 = 0$ vaut $E(t_0) = \frac{1}{2}Cu_0^2$.

À tout instant $t \in [0, t_1]$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^t Cu(s)u'(s) ds$; à

tout instant $t \geq t_1$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $E(t) = E(t_1) + \int_{t_1}^t Cu(s)u'(s) ds$.

Q 6. Déterminer $E(t_1)$ en fonction de u_0 et C .

Q 7. Exprimer la valeur de l'énergie $E(t)$ à tout instant $t \geq t_1$, en fonction de C et $u(t)$.

Q 8. L'énergie $E(t)$ possède-t-elle une limite finie quand $t \rightarrow +\infty$? Si oui, donner la valeur de cette limite.

II La méthode d'Euler

II.A – Résultats préliminaires

II.A.1)

Q 9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geq 1 - x$.

Q 10. Donner une représentation graphique de cette inégalité.

II.A.2)

Q 11. Montrer que $\frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$.

Q 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$.

Q 13. Montrer que la suite de terme général $\frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$ est bien définie pour tout $n \geq N$, montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Q 14. En déduire que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

II.A.3)

Q 15. Montrer l'existence de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{1 - e^{-x}}$ et déterminer sa valeur.

II.B – Schéma d'approximation par la méthode d'Euler

Fixons des réels $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Considérons l'équation différentielle suivante où l'inconnue est la fonction y :

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = -\lambda y(t) \tag{II.1}$$

On note f l'unique solution de l'équation (II.1) vérifiant la condition initiale $y(0) = c$. On se propose de calculer de manière approchée la fonction f à l'aide de la méthode d'Euler.

Pour cela, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

— on partage le segment $[0, T]$ en N segments $[t_n, t_{n+1}]$ ($0 \leq n \leq N - 1$) de même longueur $h > 0$, on a donc $h = T/N$ et $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $t_n = nh$;

— on définit la suite (y_n) par récurrence de la manière suivante

- $y_0 = f(0)$;
- pour tout $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, si D_n est la droite passant par le point de coordonnées (t_n, y_n) de coefficient directeur $-\lambda y_n$, alors y_{n+1} est l'ordonnée du point de D_n d'abscisse t_{n+1} .

Q 16. Donner la valeur de $f(t)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Q 17. Pour tout $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, déterminer une équation cartésienne de la droite D_n .

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, $y_{n+1} = (1 - \lambda h)y_n$.

Q 19. On suppose dans cette question seulement que $c = 1$, $\lambda = 1$, $T = 1$ et $h = 1/10$. Représenter sur un même graphique la courbe représentative de la solution f de l'équation (II.1) correspondant à ces valeurs numériques, les droites D_0 , D_1 et D_2 ainsi que les points de coordonnées (t_n, y_n) et $(t_n, f(t_n))$ pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, en précisant les valeurs de ces coordonnées (on donnera une approximation de ces valeurs à 10^{-3} près).

Q 20. Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, exprimer le terme général y_n en fonction de n , c , λ et h .

Q 21. En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N$. (On rappelle que $h = T/N$.)

II.C – Étude de l'erreur de consistance du schéma d'approximation

On pose, pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\varepsilon_n(h) = f(t_n) - (1 - \lambda h)f(t_{n-1})$ et $\varepsilon(h) = \sum_{n=1}^N |\varepsilon_n(h)|$. Le réel $\varepsilon(h)$ est l'erreur de consistance du schéma : cette erreur résulte directement du schéma d'approximation, indépendamment des erreurs dues aux arrondis dans les calculs.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\varepsilon_n(h) = ce^{-\lambda t_{n-1}}(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$.

Q 23. Soit $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Déterminer le signe du réel $e^{-\lambda t_{n-1}}(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$.

Q 24. Montrer l'égalité $\varepsilon(h) = |c|(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h) \frac{1 - e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda h}}$.

Q 25. En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

On dit dans ce cas que le schéma d'approximation est consistant.

II.D – Étude de la stabilité du schéma d'approximation

On considère, dans cette sous-partie II.D uniquement, que la suite (y_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i.e. que l'on approxime les solutions de l'équation (II.1) sur $[0, +\infty[$). $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite définie par $y_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = (1 - \lambda h)y_n$. De même, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = nh$.

En pratique, le calcul numérique des termes de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soumis à des erreurs d'arrondis : par exemple, chaque nombre est calculé avec une précision limitée par le codage des nombres flottants. Pour simplifier, on suppose que l'erreur d'arrondi $\eta \neq 0$ est constante à chaque itération. Lorsqu'on souhaite calculer les termes y_n comme dans la sous-partie II.B, à cause des erreurs d'arrondi, on calcule en fait les termes de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où z_0 est une valeur approchée de y_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = (1 - \lambda h)z_n + \eta$$

On cherche à savoir si le schéma d'approximation tend à amplifier ou à réduire les erreurs d'arrondis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = z_n - y_n$. On note $a = 1 - \lambda h$ et $r = \frac{\eta}{1 - a}$. On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - r$.

II.D.1)

Q 26. Vérifier que r est bien défini.

Q 27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + \eta$.

Q 28. Établir que la suite de terme général v_n est géométrique. En déduire une expression du terme général v_n , puis du terme général u_n , en fonction de n , a , y_0 , z_0 et η .

II.D.2)

Q 29. On suppose $u_0 \neq r$. Montrer que la suite (u_n) est bornée si et seulement si $|a| \leq 1$.

Q 30. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur h et λ pour que la suite (u_n) soit bornée quelle que soit la valeur de η .

On dit que le schéma d'approximation est conditionnellement stable.

II.D.3) Exemple

Q 31. On suppose dans cette question que $\lambda = 100$, $c = 1$ et $z_0 = y_0$. Donner une valeur de h pour laquelle la suite $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée tandis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne l'est pas.

III Étude de la stabilité d'un schéma numérique dans le cas d'un système différentiel

III.A – Étude d'un système différentiel

III.A.1) On considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) &= -\frac{3}{2}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) \\ y_2'(t) &= \frac{1}{2}y_1(t) - \frac{3}{2}y_2(t) \end{cases}$$

Q 32. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ce système puisse s'écrire sous la forme de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t) \tag{III.1}$$

où l'inconnue est la fonction $Y : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$.

Q 33. Justifier, sans aucun calcul, que la matrice A est diagonalisable.

Q 34. On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Justifier qu'il existe une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité : $D = P^{-1}AP$.
On ne demande pas de calculer la matrice P .

Q 35. Résoudre le système différentiel $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = DX(t)$, où l'inconnue est la fonction $X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$.

III.A.2)

Q 36. Montrer que, pour tout $h > 0$, la matrice $I_2 - hA$ est inversible.

Q 37. Soit $h > 0$. On pose $B_h = (I_2 - hA)^{-1}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_h^n est semblable à

la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+h)^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+2h)^n} \end{pmatrix}$.

Q 38. En déduire que pour tout $U \in \mathbb{R}^2$, la suite de terme général $B_h^n U$ converge vers le vecteur $0_{\mathbb{R}^2}$.

III.B – Méthode d'Euler

On considère un vecteur $C \in \mathbb{R}^2$ et le système différentiel suivant

$$\forall t \in [0, T], \quad Y'(t) = AY(t) \tag{III.2}$$

On note $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'unique solution du système (III.2) vérifiant la condition initiale $Y(0) = C$.

Q 39. Montrer, pour tout $t \in]0, T]$, l'existence dans \mathbb{R}^2 de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(F(t) - F(t-h))$ et préciser sa valeur.

Soit $h > 0$. Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note $Y_n \in \mathbb{R}^2$ une valeur approchée de $F(t_n)$. En tout point $t_n, 1 \leq n \leq N$, on approche le vecteur dérivé $F'(t_n)$ par le taux d'accroissement $\frac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1})$. On calcule les termes de la suite (Y_n) en posant :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \frac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1}) = AY_n$$

Q 40. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, Y_{n+1} = B_h Y_n$.

Q 41. En déduire Y_N en fonction de B_h, Y_0 et N .

On considère qu'à chaque itération on effectue le calcul avec une erreur d'arrondi constante égale à $V \in \mathbb{R}^2$. On définit les suites (Y_n) et (Z_n) à valeurs dans \mathbb{R}^2 par leurs premiers termes Y_0 et Z_0 et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N} : Y_{n+1} = B_h Y_n$ et $Z_{n+1} = B_h Z_n + V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = Z_n - Y_n$.

Q 42. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = B_h U_n + V$.

Q 43. Démontrer que la matrice $I_2 - B_h$ est inversible.

Q 44. On note $U_\infty = (I_2 - B_h)^{-1}V$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_\infty = B_h(U_n - U_\infty)$.

Q 45. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = (I_2 - B_h^n)U_\infty + B_h^n U_0$.

Q 46. En déduire que la suite (U_n) est bornée dans \mathbb{R}^2 quelle que soit la valeur de l'erreur V et quel que soit le nombre $h > 0$.

On dit dans ce cas que la méthode d'approximation est stable.

• • • FIN • • •
