CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Un principe d'incertitude matriciel

Notations

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note Id l'application identité de E. Un nombre complexe λ est valeur propre d'un endomorphisme ϕ de E si $\mathrm{Ker}(\phi-\lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. On note $\mathrm{VP}(\phi)$ l'ensemble des valeurs propres de ϕ. Pour tout $\lambda \in \mathrm{VP}(\phi)$, $\mathrm{Ker}(\phi-\lambda\mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de E, que l'on note $E_\lambda(\phi)$.

Si $x = (x_1,x_2,\dots,x_N)$ est un élément de $\mathbb{R}^N$, on note $\|x\|$ sa norme euclidienne canonique : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients réels.
On note I_N la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et, si $(\alpha_1,\dots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\alpha_1,\dots,\alpha_N$.

L'ensemble des valeurs propres d'un élément A de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{Sp}(A)$.
On note $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille N. On note $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles positives (resp. définies positives) de taille N.

Partie A – Autour du principe d'incertitude d'Heisenberg

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables.

I – Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde

Q1. Pour tout $f \in E$, on pose $\ell(f) = -f''$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme ℓ de E.

Q2. Montrer que $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{VP}(\ell)$. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$, déterminer une base de $E_\lambda(\ell)$.

II – Cas des fonctions gaussiennes

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $G_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2} \end{cases}$ (gaussienne de paramètre a). On admet la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

On fixe un réel a strictement positif.

Q3. Montrer pour tout réel ξ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t$.

On notera dans la suite $\widehat{G_a} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t \end{cases}$

Q4. Démontrer que l'application $\widehat{G_a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q5. Démontrer que $\widehat{G_a}$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera.
En déduire que $\widehat{G_a} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\, G_{1/a}$.

Q6. Démontrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u)\mathrm{d}u$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u)\mathrm{d}u$ sont convergentes et déterminer leurs valeurs.

On définit le réel positif $\sigma_{\mathrm{F}}(G_a)$ (resp. $\sigma_{\mathrm{T}}(G_a)$) par la relation

$$\sigma_{\mathrm{F}}^2(G_a) = \frac{1}{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(u)^2 \mathrm{d}u} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \widehat{G_a}(u)^2 \mathrm{d}u$$

$$\left(\text{resp. } \sigma_{\mathrm{T}}^2(G_a) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(u)^2 \mathrm{d}u} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a(u)^2 \mathrm{d}u.\right)$$

Q7. Démontrer l'égalité $\sigma_{\mathrm{T}}^2(G_a) = \gamma(\sigma_{\mathrm{F}}^2(G_a))$, où $\gamma : x \mapsto \frac{1}{4x}$.

Pour f un élément non nul d'une certaine classe de fonctions $\mathcal{S}$, on a $\sigma_{\mathrm{T}}^2(f)\sigma_{\mathrm{F}}^2(f) \geqslant \frac{1}{4}$ (inégalité d'Heisenberg). Si f représente un signal réel, $\sigma_{\mathrm{T}}^2(f)$ représente son étalement dans le domaine temporel et $\sigma_{\mathrm{F}}^2(f)$ son étalement dans le domaine fréquentiel. Le principe d'incertitude d'Heisenberg dit alors qu'on ne peut pas localiser précisément et simultanément un signal dans les deux domaines.
Les multiples des gaussiennes sont les seuls éléments de $\mathcal{S}$ qui réalisent l'égalité dans l'inégalité d'Heisenberg.
L'application $\gamma : x \mapsto \frac{1}{4x}$ vérifie donc $\gamma(x) = \min\limits_{\substack{f \in \mathcal{S}\setminus\{0\} \\ \sigma_{\mathrm{F}}^2(f) = x}} \sigma_{\mathrm{T}}^2(f)$, pour tout réel x strictement positif.

Le but du sujet dans la suite est d'établir pour des signaux discrets (éléments de $\mathbb{R}^N$), un résultat semblable, relativement à une matrice A donnée (principe d'incertitude matriciel). Il s'agira en particulier de définir dans ce contexte les analogues de σ_{T}^2, σ_{F}^2 et γ et d'en étudier certaines propriétés.

Partie B – Laplacien d'une matrice

Dans cette partie B, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille N, à coefficients dans $\{0,1\}$, de diagonale nulle. Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est un élément de $\mathcal{G}$ on définit

$$\delta(A) = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{1,k}, \sum_{k=1}^{N} a_{2,k}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} a_{N,k}\right) \text{ et } L_A = \delta(A) - A.$$

I – Étude d'un élément de $\mathcal{G}$

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q8. Déterminer la matrice L_B. Que vaut $\mathrm{rg}(L_B)$?

Q9. Calculer L_B^2. En déduire $\mathrm{Sp}(L_B)$ et pour tout réel $\lambda \in \mathrm{Sp}(L_B)$, déterminer $\dim(E_\lambda(L_B))$.

Q10. La matrice L_B est-elle élément de $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$? de $\mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$?

II – Étude du noyau des éléments de $\mathcal{G}$

Soit A un élément de $\mathcal{G}$. On note $\mathbb{1}_N$ le vecteur colonne de taille N ne contenant que des 1.

Q11. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{1}_N) \subset \mathrm{Ker}(L_A)$. A-t-on l'égalité ?

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

On rappelle qu'on peut identifier les éléments de $\mathbb{R}^N$ et les matrices colonnes de taille N. Ainsi, dans les questions suivantes, x est identifié à la matrice colonne de taille N dont les coefficients sont $x_1, x_2, \ldots, x_N$, et sa transposée x^T est identifiée à la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{pmatrix}$.

Q12. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} a_{i,j}x_i^2 = x^T\,\delta(A)\,x.$

Q13. En déduire :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{i,j}(x_i-x_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} a_{i,j}(x_i-x_j)^2 = x^T L_A x. \qquad (\star)$$

Q14. En déduire que $L_A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$.

Q15. On dit qu'un élément $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}$ de $\mathcal{G}$ vérifie la propriété (Γ) lorsque pour tout $(i,j)\in[\![1,N]\!]^2$ tel que $i\neq j$, il existe un entier $n\geqslant 2$ et des éléments deux à deux distincts $i_1,i_2,\dots,i_n$ de $[\![1,N]\!]$, vérifiant :

$$i_1=i,\qquad \forall k\in[\![1,n-1]\!], a_{i_k,i_{k+1}}=1\quad \text{et } i_n=j.$$

Dans cette question, on suppose que A vérifie la propriété (Γ). Montrer que $\mathrm{Ker}(L_A)=\mathrm{Vect}(\mathbb{1}_N)$.

Partie C – Région de faisabilité, courbe d'incertitude

Dans la partie C et la partie D, on suppose que $N\geqslant 4$ et on considère l'élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

I – Définitions de σ_{M}^2 et σ_{S}^2

Q16. Montrer que A est un élément de $\mathcal{G}$ vérifiant la propriété (Γ) définie dans la question **Q15**, sous-partie B.II.

Q17. En utilisant la partie précédente, montrer qu'il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in(\mathbb{R}_+)^N$ tel que :

$$\mathrm{Sp}(L_A)=\{\lambda_i, i\in[\![1,N]\!]\}\quad\text{et}\quad 0=\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N.$$

Q18. Déterminer L_A et $\mathrm{rg}(L_A-I_N)$. En déduire $\mathrm{Sp}(L_A)$. On vérifiera que $\dim(E_{\lambda_N}(L_A))=1$.

On pose $D=\mathrm{diag}(0,1,1,\dots,1)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$, on définit :

$$\sigma_{\mathrm{M}}^2(x)=\frac{1}{\|x\|^2}\,x^TDx\ \text{ et }\ \sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=\frac{1}{\|x\|^2}\,x^TL_Ax.$$

Q19. Soit $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. Démontrer que $\lambda_1\leqslant\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)\leqslant\lambda_N$.
Montrer que :
i) pour tout $\mu\in\mathbb{R}^*, \sigma_{\mathrm{S}}^2(\mu x)=\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)$;
ii) $\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=\lambda_1$ si et seulement si $x\in E_{\lambda_1}(L_A)$.

On **admet** dans la suite que $\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=\lambda_N$ si et seulement si $x\in E_{\lambda_N}(L_A)$.

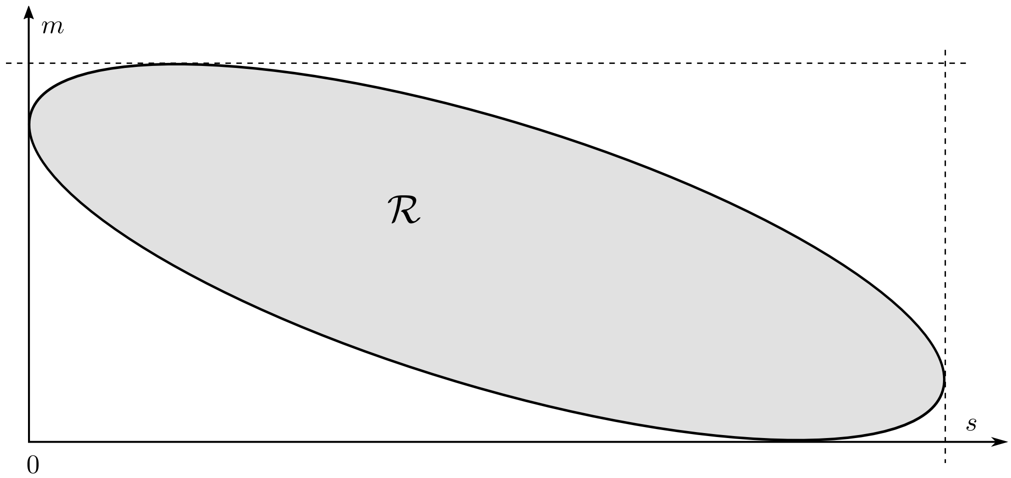
II – Région de faisabilité

On rappelle que la matrice A a été définie au début de la partie C.

On définit la *région de faisabilité* de A et on note $\mathcal{R}$ l'ensemble

$$\mathcal{R}=\left\{(s,m)\in(\mathbb{R}_+)^2\,|\,\exists x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},\ \sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=s,\ \sigma_{\mathrm{M}}^2(x)=m\right\}.$$

À titre indicatif, la figure ci-après représente $\mathcal{R}$ pour une certaine valeur de N. Le but de cette partie est de démontrer certaines propriétés observables sur cette figure.



Q20. Montrer que $\mathcal{R} \subset [0,\lambda_N] \times [0,1]$.

Q21. Soit $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tel que $\sigma_{\mathrm{S}}^2(x) = 0$. Montrer que $\sigma_{\mathrm{M}}^2(x) = \frac{N-1}{N}$. En déduire que $\mathcal{R}$ intersecte la droite d'équation $s = 0$ en un unique point dont on précisera les coordonnées.

Q22. Démontrer de même que $\mathcal{R}$ intersecte en un unique point dont on déterminera les coordonnées chacune des deux droites suivantes : la droite d'équation $s = \lambda_N$ et la droite d'équation $m = 0$.

III – La courbe d'incertitude γ_-

Q23. Soient $e_1 \in E_{\lambda_1}(L_A)$ et $e_N \in E_{\lambda_N}(L_A)$ tels que $\|e_1\| = 1$ et $\|e_N\| = 1$. On considère $x_t = (1-t)e_1 + te_N$ où $t \in [0,1]$.
Justifier que l'application $\varphi \,:\, t \mapsto \sigma_{\mathrm{S}}^2(x_t)$ est définie sur $[0,1]$. Démontrer que, pour tout $s \in [0,\lambda_N]$, il existe $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tel que $\sigma_{\mathrm{S}}^2(x) = s$.

Q24. En déduire l'existence de la quantité $\displaystyle\min_{\substack{\|x\|=1 \\ \sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=s}} \sigma_{\mathrm{M}}^2(x)$ pour tout $s \in [0,\lambda_N]$.

La question **Q24** permet de définir $\gamma_- \,:\, \begin{cases} [0,\lambda_N] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s & \longmapsto \displaystyle\min_{\substack{\|x\|=1 \\ \sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=s}} \sigma_{\mathrm{M}}^2(x) \end{cases}$.

Q25. On **admet** que $\mathcal{R}$ est un ensemble convexe. Démontrer que γ_- est une fonction convexe sur $[0,\lambda_N]$.

Partie D – Formule explicite pour la courbe d'incertitude γ_-

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit un élément $M(\alpha)$ de $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ par la relation $M(\alpha) = D - \alpha L_A$. On note

$$\mu_\alpha^- = \min\{\mathrm{Sp}(M(\alpha))\} \text{ et } \mu_\alpha^+ = \max\{\mathrm{Sp}(M(\alpha))\}.$$

Q26. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha))$ tel que $\|y\| = 1$. Démontrer que $\sigma_{\mathrm{M}}^2(y) = \gamma_-(\sigma_{\mathrm{S}}^2(y))$.

On fixe $\alpha \neq 0$.

Q27. Montrer que $\mathrm{rg}(M(\alpha) - (1-\alpha)I_N) = 2$. En déduire $\mu_\alpha^- \leqslant 1 - \alpha \leqslant \mu_\alpha^+$.

Q28. Soient a, b et c trois réels vérifiant $a \leqslant b$.
On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les racines du trinôme du second degré $x \mapsto (x-a)(x-b) + \lambda(x-c)$ sont réelles. Démontrer que $a \leqslant c \leqslant b$.

Q29. On note $E_{1,1}$ l'élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui d'indice (1,1) qui vaut 1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $N(\lambda) = M(\alpha) - \lambda E_{1,1}$. Donner une relation entre les polynômes caractéristiques de $N(\lambda)$ et de $M(\alpha)$. En déduire $\mu_\alpha^- < 1 - \alpha < \mu_\alpha^+$.

Q30. Soit $V = \left\{(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N, v_1 = 0 \text{ et } \sum_{i=2}^{N} v_i = 0\right\}$.

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ dont on déterminera la dimension d et une base.

Q31. Montrer $E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_2) \in \mathbb{R}^N, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $x(\theta) = \left(\cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sin(\theta), \dots, \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sin(\theta)\right)$ un vecteur unitaire de $E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha))$.

Q32. À l'aide de la formule ($\star$) établie à la question **Q13** sous-partie B.II, démontrer l'égalité :

$$\sigma_{\mathrm{S}}^2(x(\theta)) = \frac{N}{2} + \frac{N-2}{2} \cos(2\theta) - \sqrt{N-1} \sin(2\theta).$$

Q33. En déduire : $-\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left[\sigma_{\mathrm{S}}^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_{\mathrm{M}}^2(x(\theta)) - (N-1)\right]$.

Q34. Démontrer

$$(N-1)(1 - 2\sigma_{\mathrm{M}}^2(x(\theta)))^2 + \left(\sigma_{\mathrm{S}}^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_{\mathrm{M}}^2(x(\theta)) - (N-1)\right)^2 = N-1.$$

Q35. En déduire que :

$$\forall s \in [0, \lambda_N], \gamma_-(s) = \frac{-s(N-2) - N(N-1) - 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}}{N^2}.$$

◇ Fin ◇