

Dans tout le problème  $n$  désigne un entier naturel.  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  dont la base canonique est  $e = (1, X, \dots, X^n)$ .

On rappelle également que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{j!}{i!(j-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq j \end{cases}.$$

On note  $|A|$  le cardinal de tout ensemble fini  $A$  et on dit que  $A$  est **stable** par une fonction  $f$  si et seulement si  $f$  est définie en tout  $x \in A$  et  $f(x) \in A$ .

Si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $M^\top$  désigne sa matrice transposée.  $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Le problème comporte 4 parties largement indépendantes. La partie A est consacrée à l'étude des matrices dites de Pascal. La partie B porte sur l'étude d'une suite numérique puis sur l'étude d'une série entière. Dans les parties C et D,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La partie C est relative à deux représentations (par graphe ou par matrice) des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Enfin la partie D aborde un calcul de probabilité (seule cette partie repose sur les parties précédentes).

## Partie A – Matrices de Pascal

On se place dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et on considère les deux applications  $u$  et  $v$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(X+1), \quad v(P) = P(X-1).$$

### I – Cas particulier $n = 2$

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $n = 2$ .

**Q1.** Démontrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  et que la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  est donnée par :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Q2.** On s'intéresse à la matrice  $\text{Mat}_e(u)$  obtenue précédemment. Justifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse. Quel est le spectre de  $\text{Mat}_e(u)$ ?  $\text{Mat}_e(u)$  est-elle diagonalisable?

### II – Des matrices semblables à leurs inverses

On revient au cas général (ce qui signifie qu'on ne suppose plus  $n = 2$  mais  $n \in \mathbb{N}$  quelconque) et on admet que  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On appelle **matrice supérieure de Pascal** la matrice notée  $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  représentative de  $u$  dans la base canonique  $e$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  (on numérote les lignes et les colonnes de  $U$  par  $i$  et  $j$  appartenant à  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ).

**Q3.** Montrer que  $U$  est triangulaire supérieure puis démontrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $U$  est égal à  $\binom{j}{i}$ . Étudier la diagonalisabilité de  $U$ .

**Q4.** Déterminer  $u \circ v$ , en déduire que  $u$  est bijective puis que  $U$  est inversible et déterminer le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $U^{-1}$ . Ce résultat est-il cohérent avec la matrice inverse calculé en **Q2**?

**Q5.** On note  $D$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le  $i$ -ème coefficient diagonal est  $(-1)^i$ . Démontrer que  $D$  est inversible et égale à son inverse.

- Q6.** Calculer  $DU$  et  $U^{-1}D$  et en déduire que  $U = DU^{-1}D$  puis que  $U$  est semblable à son inverse.
- Q7.** On appelle **matrice inférieure de Pascal** la matrice définie par  $L = U^\top$ . Établir que  $L = DL^{-1}D$  et en déduire que  $L$  est également semblable à son inverse.

### III – Une matrice diagonalisable semblable à son inverse

On appelle enfin **matrice symétrique de Pascal** la matrice  $S = LU$ .

- Q8.** Dans cette question à nouveau on fixe  $n = 2$ . Calculer  $S$  et justifier que  $S$  est diagonalisable puis démontrer que le spectre de  $S$  est constitué de trois valeurs  $1$ ,  $\alpha$  et  $\frac{1}{\alpha}$  avec  $\alpha > 1$ .
- Q9.** On revient au cas général ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Justifier que  $S$  est diagonalisable, inversible et :

$$S^{-1} = (DU)S(DU)^{-1}.$$

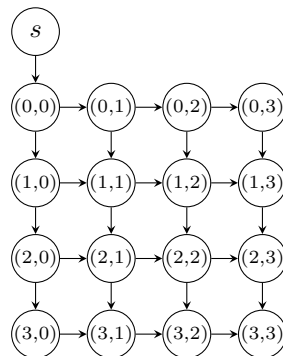
En déduire que  $S$  est à nouveau semblable à son inverse.

- Q10.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $S$  et  $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé. Démontrer que  $\lambda > 0$  (on pourra pour cela calculer de deux façons  $X^\top SX$ ).
- Q11.** Démontrer que le spectre de  $S$  est stable par  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .
- Q12.** En considérant la matrice  $A$  ci-dessous, déterminer si, réciproquement, une matrice inversible dont le spectre est stable par  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est toujours semblable à son inverse (on pourra calculer la trace de  $A$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

### IV – Calcul des coefficients de $S$ à l'aide d'un dénombrement dans un graphe

On considère le graphe orienté  $G_n$  dont les sommets sont les couples  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  ainsi qu'un sommet particulier appelé **source** et noté  $s$ . Les arcs de  $G_n$  sont les suivants : un arc de  $s$  vers  $(0, 0)$  (un tel arc est noté  $s \rightarrow (0, 0)$ ) et les arcs  $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et les arcs  $(i, j) \rightarrow (i+1, j)$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ . Par exemple, on a représenté ci-dessous le graphe  $G_3$  :



**Figure 1** – Graphe  $G_3$ .

Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ , on s'intéresse à l'ensemble des chemins de  $s$  vers  $(i, j)$  dans  $G_n$  et on note cet ensemble  $\Omega_{i,j}$ . Par exemple il n'y a qu'un seul chemin de  $s$  vers  $(0, 0)$  qui est l'arc  $s \rightarrow (0, 0)$  ainsi  $\Omega_{0,0}$  est le singleton :

$$\Omega_{0,0} = \{s \rightarrow (0, 0)\}.$$

Si  $n \geq 2$ , il y a trois chemins de  $s$  vers  $(1, 2)$  et  $\Omega_{1,2}$  est l'ensemble à trois chemins :

$$\Omega_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} s \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (1, 2), \\ s \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2), \\ s \rightarrow (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2) \end{array} \right\}.$$

**Q13.** Déterminer  $\Omega_{2,2}$  et vérifier que  $|\Omega_{2,2}| = 6$  puis justifier que, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,  $|\Omega_{i,j}| = \binom{i+j}{i}$ .

**Q14.** Soient  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  et  $k \in \llbracket 0, i \rrbracket$ . On note  $A_k$  l'événement «le chemin passe par le sommet  $(k, i - k)$ ». En remarquant qu'un chemin de  $A_k$  est constitué d'un chemin de  $s$  vers  $(k, i - k)$  puis d'un chemin de  $(k, i - k)$  vers  $(i, j)$ , déterminer  $|A_k|$  et montrer que  $(A_k)_{k \in \llbracket 0, i \rrbracket}$  est un système complet d'événements puis en déduire que :

$$\binom{i+j}{i} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{j}{i-k}.$$

**Q15.** Déduire de cette formule que le coefficient d'indice  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  de  $S$  est égal à  $\binom{i+j}{i}$ .

## Partie B – Étude d'une suite et d'une série entière

### I – Étude d'une suite

On considère la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}). \end{cases}$$

**Q16.** Vérifier que  $a_2 = 1$  et  $a_3 = 2$ .

**Q17.** Écrire une fonction Python `liste_an(n)` prenant en paramètre  $n \in \mathbb{N}$  et renvoyant la liste  $[a_0, \dots, a_n]$ .

**Q18.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in \mathbb{N}$ .

**Q19.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq n!$ .

**Q20.** On cherche à déterminer une caractérisation de l'entier  $a_n$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ) et à en déduire un équivalent simple.

À cette fin, on considère la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n!}$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ) dont on note  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$  la somme partielle. Démontrer que cette série converge, préciser sa limite et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq \frac{1}{e} \leq S_{n+1} \text{ ou } S_{n+1} \leq \frac{1}{e} \leq S_n.$$

**Q21.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = n!S_n$  et en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n$  est le plus proche entier de  $\frac{n!}{e}$ , c'est-à-dire que  $a_n$  est l'unique entier tel que  $|\frac{n!}{e} - a_n| < \frac{1}{2}$ .

**Q22.** En déduire que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{e}$ .

### II – Étude d'une série entière

L'étude de la série entière de terme général  $\frac{a_n}{n!}x^n$ , dont on note  $s(x)$  la somme, va nous permettre d'obtenir une autre relation satisfaite par  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Q23.** Montrer que  $R$ , le rayon de convergence de  $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ , est égal à 1 (on pourra utiliser **Q21**) puis que  $s$  est solution du système ci-dessous sur  $] -1, 1[$  :

$$\begin{cases} (1-x)y' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**Q24.** Résoudre le système précédent afin d'en déduire une expression explicite de  $s(x)$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$ .

**Q25.** Appliquer la formule de Leibniz au calcul de la dérivée  $p$ -ème de  $x \mapsto e^x s(x)$  évaluée en 0, et après avoir rappelé le lien entre  $a_k$  et  $s^{(k)}(0)$  (pour  $k \in \mathbb{N}$ ), en déduire que :

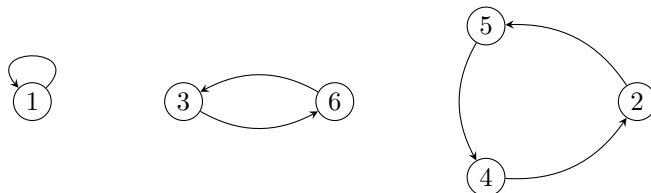
$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, p! = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k.$$

## Partie C – Permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

On rappelle que dorénavant,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle **permutation** de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  toute application bijective de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même et on note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

### I – Représentations d'une permutation

On propose deux manières de représenter une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . La première consiste à considérer un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et pour lequel il existe un arc du sommet  $i$  vers  $j$  si et seulement si  $\sigma(i) = j$ . Par exemple,  $\sigma \in \mathcal{S}_6$  définie par  $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 5, \sigma(3) = 6, \sigma(4) = 2, \sigma(5) = 4, \sigma(6) = 3$ , est représentée par le graphe  $G(\sigma)$  ci-dessous :



**Figure 2** – Un graphe  $G(\sigma)$  représentatif d'une permutation  $\sigma$ .

On remarquera qu'il ne s'agit pas d'un graphe au sens strict du terme puisqu'on s'autorise un arc allant d'un sommet  $i$  vers le même sommet  $i$ . Un tel arc sera dorénavant appelé une **boucle**. De même s'il existe un arc du sommet  $i$  vers le sommet  $j \neq i$  et un arc du sommet  $j$  vers le sommet  $i$  on parlera de **bi-boucle**. Par exemple le graphe représenté précédemment comporte la boucle  $1 \rightarrow 1$  et la bi-boucle  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ .

La seconde manière de représenter une permutation de  $\mathcal{S}_n$  consiste à écrire une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (dont on numérote les lignes et les colonnes par  $i$  et  $j$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ) tel que le coefficient d'indice  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  vaut 1 si et seulement si  $\sigma(i) = j$ . Par exemple,  $\sigma$  définie précédemment est représentée par la matrice :

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Figure 3** – Une matrice  $M(\sigma)$  représentative d'une permutation  $\sigma$ .

On admet que ces deux représentations définissent deux bijections  $G$  et  $M$  de  $\mathcal{S}_n$  vers  $G(\mathcal{S}_n)$  d'une part et de  $\mathcal{S}_n$  vers  $M(\mathcal{S}_n)$  d'autre part, autrement dit :

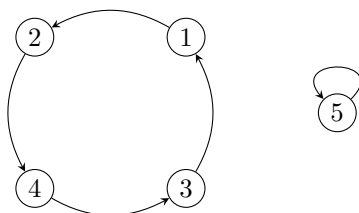
$$\forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2, \quad \sigma = \tau \Leftrightarrow G(\sigma) = G(\tau) \Leftrightarrow M(\sigma) = M(\tau).$$

**Q26.** Représenter le graphe de la permutation dont la matrice représentative est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Figure 4** – Une matrice représentative d'une permutation dont on cherche le graphe représentatif.

**Q27.** Donner la matrice représentative de la permutation dont le graphe représentatif est :



**Figure 5** – Un graphe représentatif d'une permutation dont on cherche la matrice représentative.

## II – Propriétés

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Q28.** Calculer  $M(\sigma)M(\sigma^{-1})$  et en déduire que  $M(\sigma)$  est inversible et :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma^{-1}).$$

**Q29.** Expliquer comment représenter  $G(\sigma^{-1})$  à partir de  $G(\sigma)$  et  $M(\sigma^{-1})$  à partir de  $M(\sigma)$ . En déduire que :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma)^\top.$$

**Q30.** Démontrer que :

$$M(\sigma^2) = M(\sigma)^2.$$

## III – Matrices de permutation diagonalisables

On se propose de démontrer le théorème ci-dessous :

*Une matrice  $M(\sigma)$  représentative de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est diagonalisable si et seulement si le graphe  $G(\sigma)$  représentatif de  $\sigma$  ne contient que des boucles ou des bi-boucles.*

**Q31.** Commençons par un exemple. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice introduite en **Q25** est égal à  $\chi = (X - 1)^3(X + 1)$  puis étudier sa diagonalisabilité. Cela est-il cohérent avec le théorème que l'on se propose de démontrer ?

**Q32.** Traitons le sens direct en fixant  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  tel que  $M(\sigma)$  est diagonalisable. Démontrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $M(\sigma)$  alors  $\lambda^2 = 1$  (on pourra s'inspirer de **Q10**).

**Q33.** En déduire qu'il existe  $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $M(\sigma)$  est semblable à la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ci-dessous comportant  $q$  fois le coefficient 1 et  $n - q$  fois le coefficient  $-1$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ (0) & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

**Q34.** En déduire que  $\sigma^2 = \text{id}$  puis que  $G(\sigma)$  ne contient que des boucles ou des bi-boucles.

**Q35.** Traiter la réciproque.

## Partie D – Graphes de permutations sans boucle

### I – Introduction

On se propose de calculer la probabilité qu'un graphe de  $G(\mathcal{S}_n)$ , choisi de façon aléatoire, soit sans boucle.

Notons  $B_n$  l'événement «le graphe choisi est sans boucle»,  $b_n$  le cardinal de  $B_n$  et  $X_n$  la variable aléatoire qui au graphe choisi associe le nombre de boucle(s) de celui-ci.

Pour cela, on utilisera deux méthodes indépendantes.

**Q36.** Quel est le cardinal de  $G(\mathcal{S}_n)$ ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$  ?

**Q37.** On fixe par convention  $b_0 = 0$ . Démontrer que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X_n = j) = \frac{\binom{n}{j} b_{n-j}}{n!}.$$

**Q38.** En déduire que :

$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad p! = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b_k.$$

On pourra commencer par le cas  $p = n$  puis généraliser.

**Q39.** Justifier que ces relations permettent de calculer  $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Préciser  $b_1, b_2$  et  $b_3$ .

## II – Calcul d'une probabilité par deux méthodes

**Q40.** À l'aide de la série entière de somme  $s(x)$  introduite en partie B.II, démontrer que :

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

**Q41.** On utilise enfin la matrice  $L$  introduite en **Q7**. On rappelle que cette matrice appartient à  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ , qu'elle est inversible et triangulaire inférieure.

On note  $F$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}.$$

Calculer  $L^{-1}F$  puis retrouver que :

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

---

◇ Fin ◇

---