

Faire face aux inondations

Selon le sixième rapport du GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) publié de 2021 à 2023, les ruissellements de pluies, débordements de cours d'eau ou submersions des côtes augmenteront dans presque toutes les régions du monde. En France, c'est le premier risque naturel par l'importance des dommages qu'il provoque et le nombre de communes concernées. Les récentes catastrophes montrent à quel point l'ensemble du territoire français est vulnérable, en ville ou à la campagne. Selon le rapport, dans un scénario de réchauffement à $+1,5\text{ }^\circ\text{C}$, les précipitations décennales (c'est-à-dire qui se produisent actuellement une fois tous les dix ans) se produiront 1,5 fois plus souvent. Outre les dégradations de biens et des réseaux (électriques, de télécommunications) et la perturbation des services publics (transports, collecte et gestion des déchets, hôpitaux), les inondations mettent également en péril des vies humaines. Ce sujet examine divers aspects liés à la protection contre les inondations.

Le problème comporte 3 parties indépendantes. Les données sont regroupées en fin d'énoncé.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Partie A – Barrière anti-inondation passive

En cas de crue soudaine, on envisage l'utilisation d'une barrière de protection qui se lève sous le seul effet de la poussée exercée par l'eau, donc sans intervention humaine ni aucun apport d'énergie (barrière dite « passive »). Ce dispositif est adapté aux environnements urbains pour protéger notamment les entrées de parkings souterrains (voir figure 1).



Figure 1 – Barrière anti-inondation protégeant une entrée de parking souterrain [1]

On modélise la barrière par une plaque plane rectangulaire indéformable d'épaisseur négligeable, de masse m uniformément répartie, de hauteur $L = AB$ selon la direction (Ox) et de longueur ℓ selon la direction (Oz) (voir figure 2). On note $\theta > 0$ l'angle d'inclinaison de la plaque par rapport au plan horizontal et h la hauteur d'eau présente d'un côté de la plaque. L'air environnant est à la pression P_0 uniforme et l'eau est assimilée à un fluide incompressible de masse volumique ρ . On note $M(x)$ un point de la plaque situé à la distance x de son projeté orthogonal A sur le bord inférieur de la plaque. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté \vec{g} .

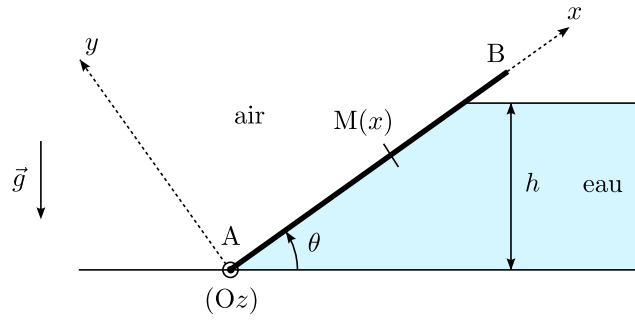


Figure 2 – Schéma de la plaque en position inclinée

On suppose que la montée du niveau d'eau est suffisamment lente pour pouvoir considérer que la plaque est en permanence en équilibre et l'eau au repos, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Q1. Établir l'expression de la pression P_{eau} de l'eau au niveau du point $M(x)$, en fonction de P_0 , ρ , g , h , θ et x .

On isole sur la plaque une bande rectangulaire infinitésimale de longueur ℓ et comprise entre x et $x + dx$.

Q2. Exprimer les forces pressantes élémentaires $d\vec{F}_{\text{eau}}$ et $d\vec{F}_{\text{air}}$ exercées respectivement par l'eau et par l'air sur cette bande.

Q3. Montrer que le moment par rapport à l'axe de rotation (Oz) des forces pressantes exercées par l'eau et par l'air sur la plaque s'écrit

$$\mathcal{M}_{\text{fluide}} = \frac{1}{6} \rho g \ell \frac{h^3}{\sin^2 \theta}$$

Q4. Exprimer en fonction des données le moment $\mathcal{M}_{\text{poids}}$ par rapport à l'axe (Oz) du poids de la plaque.

La liaison pivot autour de l'axe de rotation (Oz) est supposée parfaite.

Q5. Montrer que la condition d'équilibre de la plaque se traduit par

$$\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{3} \frac{\rho \ell}{mL} h^3$$

La figure 3 représente le graphe $h(\theta)$ lorsque cette relation d'équilibre est vérifiée, pour une plaque dont les caractéristiques sont données en fin d'énoncé.

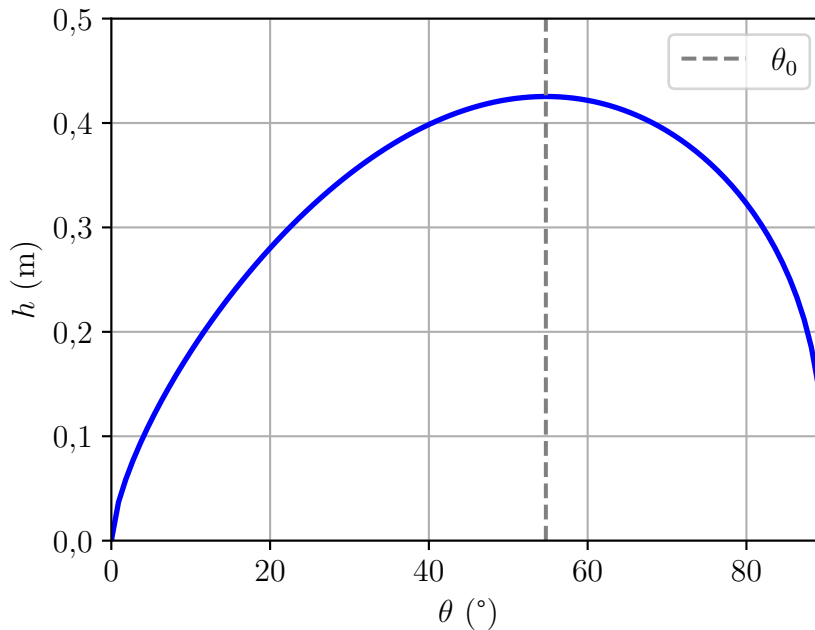


Figure 3 – Hauteur d'eau en fonction de l'angle d'inclinaison de la plaque à l'équilibre

Q6. Calculer en degrés la valeur de l'angle θ_0 pour lequel la fonction $h(\theta)$ est maximale.

Expérimentalement, lorsque l'angle d'inclinaison de la plaque atteint la valeur θ_0 , on constate que celle-ci bascule tout à coup pour se mettre à la verticale (on suppose qu'une butée limite la valeur de l'angle θ à 90°). Afin de justifier ce comportement, on réalise sur la figure 4 les tracés graphiques des moments $\mathcal{M}_{\text{fluïde}}(\theta)$ et $|\mathcal{M}_{\text{poids}}|(\theta)$ (valeur absolue du moment du poids) au voisinage de la position d'angle θ_0 et pour une hauteur $h = h(\theta_0)$ d'eau supposée maintenue constante par un dispositif annexe.

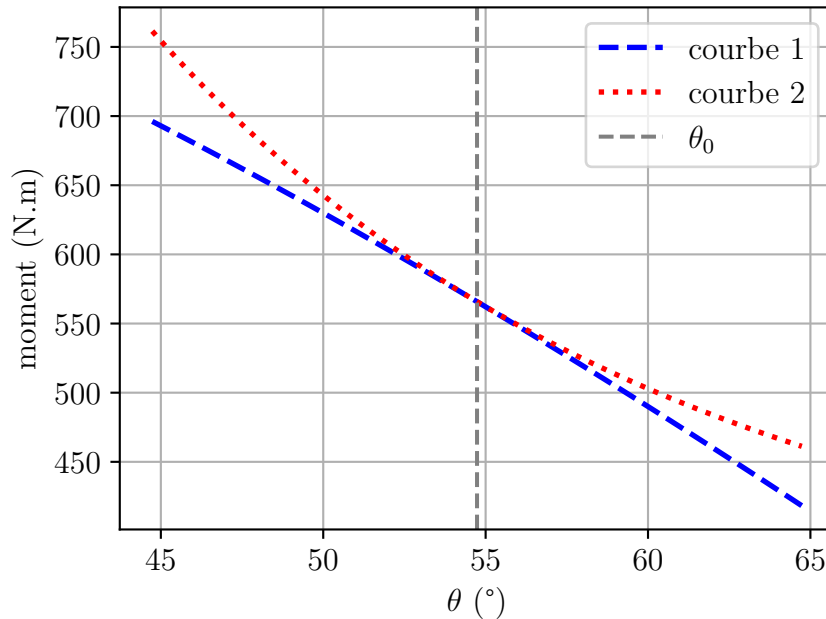


Figure 4 – Moments exercés sur la plaque autour de la valeur θ_0

- Q7.** En le justifiant, attribuer les courbes 1 et 2 aux moments $\mathcal{M}_{\text{fluïde}}$ et $|\mathcal{M}_{\text{poids}}|$.
- Q8.** Expliquer pourquoi la position de la plaque devient instable pour $\theta > \theta_0$.
- Q9.** Citer un avantage et un inconvénient liés à l'existence de cette instabilité.

Partie B – Capteur de niveau d'eau

L'alerte à donner en cas d'inondation, notamment de nuit, peut passer par une surveillance automatique du niveau d'eau. On s'intéresse ici à un capteur basé sur une sonde dont les propriétés électriques varient en fonction du niveau d'eau. Cette sonde est insérée dans un circuit électrique oscillant et la variation du niveau d'eau se traduira alors par une variation de la fréquence d'oscillation.

I – Sonde de mesure

La sonde considérée est constituée de deux conducteurs cylindriques coaxiaux d'axe vertical (Oz), de même hauteur H et de rayons R_1 et R_2 . La sonde est dans un premier temps supposée vide d'eau (dessin de gauche de la figure 5). Le milieu entre les deux cylindres est l'air de conductivité électrique γ_0 et de permittivité diélectrique ϵ_0 assimilée à celle du vide. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindrique d'axe (Oz).

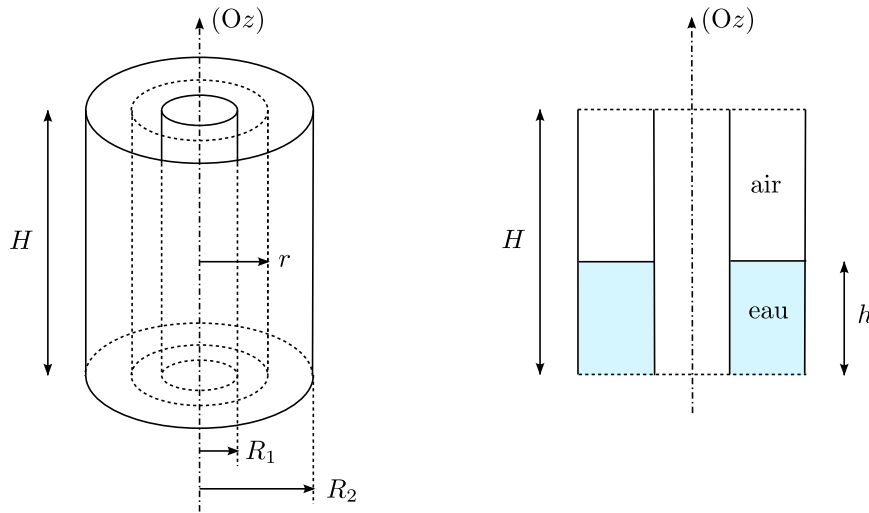


Figure 5 – Sonde de mesure vide d'eau (à gauche) et partiellement remplie d'eau (à droite)

On cherche à déterminer la résistance électrique R_0 et la capacité C_0 entre les deux cylindres.

Afin de déterminer l'expression de la résistance R_0 , on suppose qu'un courant permanent d'intensité électrique I circule du cylindre de rayon R_1 vers le cylindre de rayon R_2 . En négligeant les effets de bord, le vecteur densité de courant électrique entre les cylindres s'écrit sous la forme $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ avec r la distance à l'axe (Oz) et $R_1 < r < R_2$. Dans l'eau ou dans l'air, la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité électrique du milieu et \vec{E} et le champ électrique.

Q10. Déterminer $j(r)$ en fonction de I , H et r .

On appelle $U = V_1 - V_2$ la tension électrique entre les deux cylindres où V_1 et V_2 sont les potentiels respectifs des cylindres de rayons R_1 et R_2 .

Q11. Montrer que $U = R_0 I$ en identifiant la résistance électrique R_0 en fonction de R_1 , R_2 , H et γ_0 .

Afin de déterminer l'expression de la capacité C_0 , on suppose maintenant que les deux cylindres sont chargés et constituent les armatures d'un condensateur. Le cylindre intérieur de rayon R_1 porte une charge $Q > 0$ et le cylindre extérieur porte une charge $-Q$, toutes deux uniformément réparties en surface.

Q12. En négligeant les effets de bord, établir l'expression du champ électrique \vec{E} présent entre les armatures à une distance r de l'axe (Oz) , en fonction de Q , H , ε_0 et r .

Q13. Rappeler la définition générale de la capacité C d'un condensateur en lien avec la charge Q portée par l'une de ses armatures, en précisant sur un schéma électrique les conventions choisies.

Q14. Déterminer l'expression de la capacité C_0 en fonction de R_1 , R_2 , H et ε_0 .

On considère maintenant la sonde partiellement remplie d'eau sur une hauteur h (dessin de droite de la figure 5). L'eau a pour conductivité électrique γ_{eau} et pour permittivité diélectrique $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ où ε_r est la permittivité diélectrique relative de l'eau. On supposera que h et H sont du même ordre de grandeur.

Q15. Montrer que la résistance électrique entre les deux cylindres s'écrit sous la forme approchée

$$R_{\text{sonde}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\gamma_{\text{eau}}} \frac{1}{h}$$

Q16. Montrer que la capacité entre les deux cylindres s'écrit sous la forme approchée

$$C_{\text{sonde}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} h$$

II – Circuit électronique de mesure

La sonde, considérée comme un dipôle dont les bornes sont les deux cylindres, est insérée dans le circuit représenté sur la figure 6. Ce circuit constitue un oscillateur électrique dont on va chercher à déterminer la fréquence f d'oscillation.

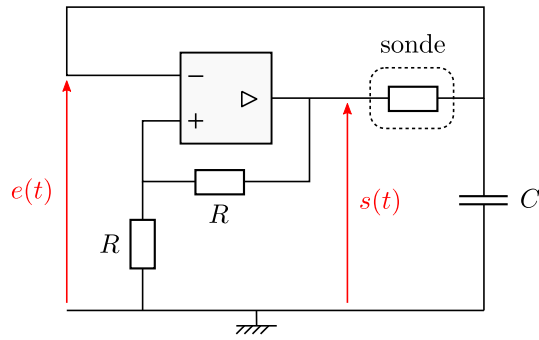


Figure 6 – Circuit électrique oscillant

L'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal. On note $\pm V_{\text{sat}}$ ses tensions de saturation en sortie avec $V_{\text{sat}} > 0$.

Q17. Sachant que la fréquence d'oscillation attendue se situe dans une gamme de l'ordre du kilohertz, montrer que la sonde, association parallèle de R_{sonde} et C_{sonde} , est équivalente à la seule résistance R_{sonde} .

Q18. Quelle est dans le circuit la source d'énergie qui assure l'entretien des oscillations ?

On étudie tout d'abord la partie du circuit constituée par l'ALI et les deux résistances R , de tension d'entrée e et de tension de sortie s .

Q19. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI ? À quel type de montage correspond cette partie du circuit ?

On note V^+ et V^- les potentiels respectifs des bornes $+$ et $-$ de l'ALI.

Q20. Exprimer la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V^+ - V^-$ en fonction de e et s .

Q21. En détaillant le raisonnement, établir le tracé de la courbe $s(e)$ en faisant apparaître les grandeurs utiles sur les deux axes.

On s'intéresse maintenant à la partie droite du montage comprenant la sonde et la capacité C .

Q22. Montrer que

$$\frac{de}{dt} + \frac{1}{\tau} e(t) = \frac{1}{\tau} s(t)$$

en exprimant τ en fonction de R_{sonde} et C .

On suppose qu'à la date $t = 0$, $s(t = 0) = +V_{\text{sat}}$ et $e(t = 0) = -V_{\text{sat}}/2$.

Q23. En utilisant les résultats établis précédemment, montrer que $e(t)$ croît et que $s(t)$ devient égal à $-V_{\text{sat}}$ à une date t_1 à exprimer en fonction de τ .

Q24. Montrer que pour $t > t_1$, $e(t)$ décroît et que $s(t)$ redevient égal à $+V_{\text{sat}}$ pour une date t_2 à exprimer en fonction de τ .

Q25. Justifier le caractère périodique des variations dans le temps des grandeurs électriques dans le circuit et donner l'expression de la fréquence f d'oscillation en fonction de τ .

La figure 7 représente une capture d'écran d'un oscilloscope sur les voies duquel ont été appliquées les tensions $e(t)$ et $s(t)$ (dans la barre inférieure, l'unité notée **us** après la valeur numérique **Time** doit être lue μs).

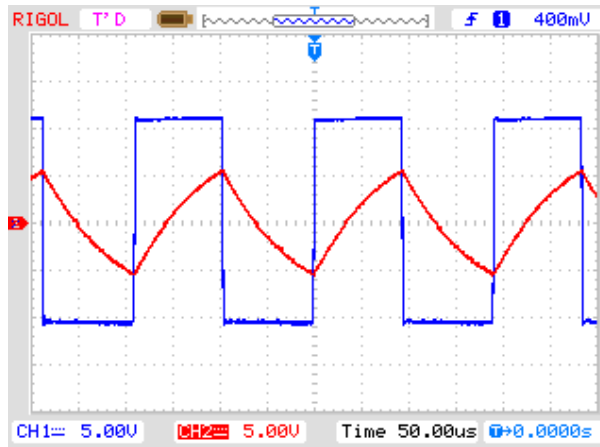


Figure 7 – Tensions s et e visualisées sur un oscilloscope

Q26. Calculer la hauteur d'eau h présente dans la sonde.

Partie C – Gilet de sauvetage

En cas d'inondation, il est fréquent d'avoir à évacuer des personnes bloquées dans leur habitation. Lors du transport en canot ou en hélicoptère, un gilet de sauvetage est alors nécessaire. Les gilets en mousse n'assurent pas systématiquement le redressement de la personne lorsqu'elle est dans une situation à risque dans l'eau. Les gilets gonflables sont au contraire conçus pour offrir une flottabilité optimale. L'un des systèmes de gonflage automatique utilise comme déclencheur la dissolution d'une pastille de sel au contact de l'eau. La dissolution libère un ressort équipé d'une aiguille qui perce une cartouche de dioxyde de carbone CO_2 et remplit le boudin du gilet (voir figure 8).



Figure 8 – Cartouche de CO_2 et pastille de sel [2][3]

I – Dissolution de la pastille de sel

On assimilera le sel de la pastille à du chlorure de sodium $\text{NaCl}_{(s)}$. La dissolution a lieu dans une eau supposée pure.

Q27. Écrire la réaction de dissolution du sel dans l'eau.

Q28. Calculer son enthalpie standard de réaction à 298 K. Commenter son signe.

Q29. La réaction de dissolution est-elle, d'un point de vue thermodynamique, favorisée à haute ou à basse température? Justifier.

On considère pour la suite qu'une pastille contient une masse $m_{\text{sel}} = 5,0$ g de sel.

Q30. Calculer l'énergie thermique reçue par la pastille de sel pour une dissolution complète supposée monotherme.

Afin de vérifier ce calcul, on réalise l'expérience suivante : on place dans un calorimètre rempli d'une masse $m_{\text{eau}} = 200$ g à $t_1 = 20,0$ °C dix pastilles de sel de température t_1 . Après agitation, l'équilibre thermique est atteint à une température $t_2 = 16,4$ °C. La capacité thermique de l'eau salée est assimilée à celle de l'eau pure.

Q31. Dédurre de l'expérience l'énergie thermique nécessaire pour dissoudre une pastille de sel. Comparer ce résultat avec celui de la question précédente.

La structure cristalline du sel est telle que les ions Cl^- occupent les sommets et les centres des faces d'une maille cubique de côté a et les ions Na^+ occupent les milieux des arêtes et le centre du cube (voir figure 9).

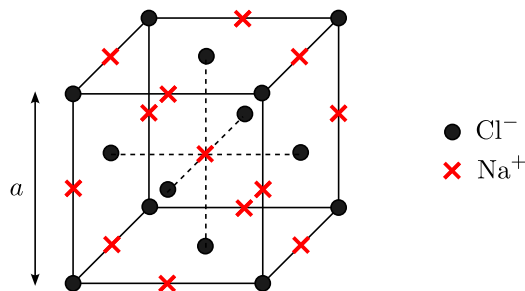


Figure 9 – Maille du cristal $\text{NaCl}_{(s)}$

Q32. Déterminer à partir des données en fin d'énoncé la valeur du paramètre de maille a .

On cherche maintenant à établir de manière théorique la valeur de l'énergie nécessaire pour dissocier complètement le cristal de sel grâce à un modèle électrostatique très simplifié : les ions Na^+ et Cl^- sont supposés tous alignés de manière alternée selon une seule direction de l'espace, et équidistants de la valeur a du paramètre de maille du cristal.

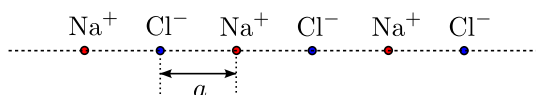


Figure 10 – Modèle électrostatique du cristal de sel

Q33. Exprimer l'énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle q_1 en présence d'une unique charge ponctuelle q_2 située à la distance r_{12} de la charge q_1 .

Q34. Montrer que dans la modélisation de la figure 10, l'énergie potentielle électrostatique d'un ion quelconque s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{ion}} = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

où e est la charge élémentaire et ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide. Donnée : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Q35. Calculer le nombre N d'ions présents dans $m_{\text{sel}} = 5,0$ g de sel.

Q36. Dédurre des questions précédentes la valeur numérique de l'énergie nécessaire pour séparer tous les ions du sel dans une pastille, dans le cadre du modèle retenu. Commenter.

II – Gonflage du gilet

La flottabilité est définie comme la norme de la poussée d'Archimède exercée par le gilet une fois qu'il est gonflé. Suivant le niveau de sécurité requis, différentes normes de flottabilité existent. On considérera ici une flottabilité égale à 150 N qui permet de faire face à de forts courants ou à de mauvaises conditions météorologiques.

Q37. Calculer le volume final V_f minimal du gilet gonflé permettant de respecter la norme de flottabilité.

On suppose que ce volume est celui occupé par le dioxyde de carbone à l'état gazeux. La cartouche de gaz indique qu'une masse $m_{\text{gaz}} = 33$ g de dioxyde de carbone y est présente.

Q38. Calculer la pression finale du dioxyde de carbone occupant le volume V_f à une température de 20 °C. Commenter.

III – Liquéfaction du CO_2

Le dioxyde de carbone est présent dans la cartouche sous forme liquide.

Q39. Quel est l'intérêt pratique d'avoir ici le CO_2 à l'état liquide dans la cartouche ? Pourquoi le stockage du CO_2 sous forme liquide est-il par ailleurs un enjeu écologique ?

On s'intéresse à un procédé de liquéfaction du dioxyde de carbone gazeux en dioxyde de carbone liquide. L'installation de liquéfaction est présentée sur la figure 11. Elle est constituée

- de trois échangeurs thermiques E_1 , E_2 et E_3 dans lesquels le CO_2 circule de manière isobare,
- de deux compresseurs C_1 et C_2 réalisant des compressions supposées adiabatiques et réversibles,
- d'une vanne de détente V calorifugée,
- d'un séparateur S qui sépare les phases liquide et vapeur du CO_2 en sortie de la vanne.

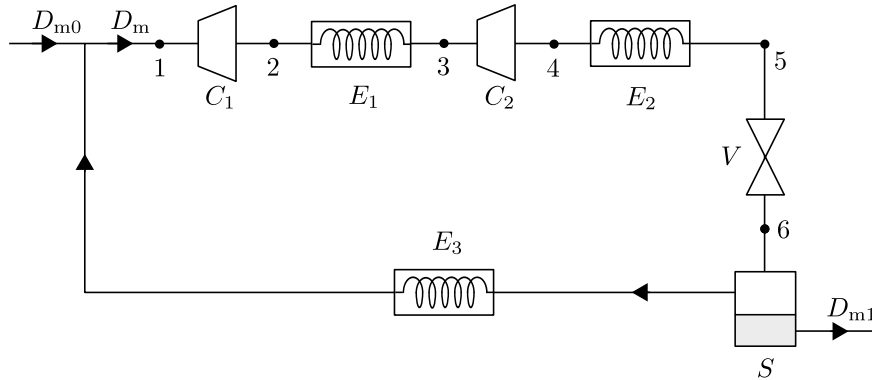


Figure 11 – Schéma de l'installation de liquéfaction

Les différents états du CO_2 sont repérés par des chiffres allant de 1 à 6. Le CO_2 est introduit avec un débit massique D_{m0} et circule avec un débit massique $D_m = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ dans les éléments C_1 , E_1 , C_2 , E_2 et V . Le diagramme thermodynamique du CO_2 donnant la pression P en bar en fonction de l'enthalpie massique h en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ figure dans le document-réponse en fin d'énoncé. Sur ce diagramme, les courbes isentropes (en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$) sont représentées par des lignes $-\cdot-\cdot-$ et les courbes isothermes (en $^\circ\text{C}$) sont représentées par des lignes $- - -$. Les valeurs notées x sont les titres massiques en vapeur.

Les variations d'énergie potentielle de pesanteur massique et d'énergie cinétique massique du CO_2 sont supposées négligeables. L'installation fonctionne en régime stationnaire.

Q40. Montrer que le passage du CO_2 dans la vanne est isenthalpe.

Q41. Montrer que le passage du CO_2 dans chaque compresseur est isentrope.

Le CO_2 est introduit dans l'installation à l'état 1 à une pression de 6 bar et à une température de 0°C par un dispositif situé en amont dont on ne tiendra pas compte dans l'étude. Le compresseur C_1 amène le fluide à une pression de 20 bar dans l'état 2 et l'échangeur E_1 ramène sa température à 0°C dans l'état 3. Le compresseur C_2 poursuit la compression en amenant le fluide à 80 bar dans l'état 4. En sortie 5 de l'échangeur E_2 , le fluide est à une température de 35°C . La vanne de détente ramène le fluide à sa pression d'entrée de 6 bar dans l'état 6.

Q42. Placer sur le document-réponse les points allant de 1 à 6 et dessiner la courbe qui les relie.

Tous les résultats numériques de calculs de puissance demandés dans la suite seront écrits avec deux chiffres significatifs.

Q43. Calculer la puissance mécanique totale nécessaire pour alimenter les deux compresseurs C_1 et C_2 .

Q44. Quel est l'intérêt d'utiliser deux compresseurs au lieu d'un seul pour amener le CO_2 de 6 bar à 80 bar ?

Dans les échangeurs E_1 et E_2 , le CO_2 est refroidi grâce à une machine frigorifique d'efficacité $e_F = 2,0$.

Q45. Calculer la puissance mécanique totale nécessaire pour alimenter la machine frigorifique.

Q46. Calculer le débit massique D_{m1} de CO_2 liquide obtenu en sortie du séparateur S .

Q47. Calculer le débit D_{m0} du CO_2 à introduire dans l'installation.

Les compresseurs C_1 et C_2 ainsi que le compresseur de la machine frigorifique sont alimentés en énergie électrique et ont un rendement identique égal à 80 %.

Q48. Calculer en € le coût en électricité pour produire de quoi remplir 10 000 cartouches de CO_2 .

Données et formulaire

Données numériques partie A

Masse volumique de l'eau	$\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de la plaque	$m = 200 \text{ kg}$
Hauteur de la plaque	$L = 1,00 \text{ m}$
Longueur de la plaque	$\ell = 3,00 \text{ m}$

Données numériques partie B

Rayons de la sonde	$R_1 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}$ et $R_2 = 3,0 \times 10^{-2} \text{ m}$
Conductivité électrique de l'air	$\gamma_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Conductivité électrique de l'eau	$\gamma_{\text{eau}} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative de l'eau en régime statique	$\epsilon_r = 80$
Capacité du condensateur	$C = 1,0 \mu\text{F}$

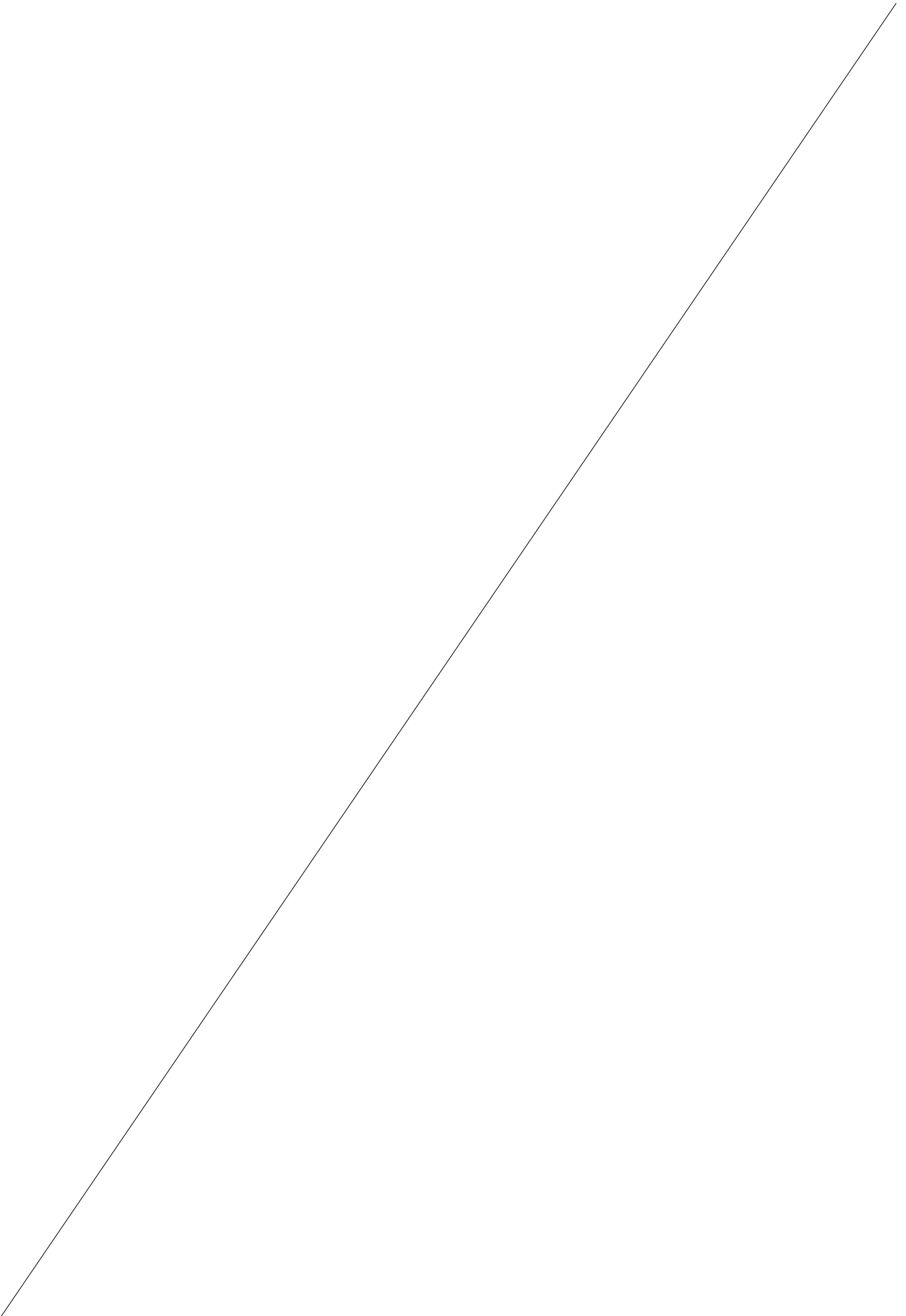
Données numériques partie C

Masse volumique du chlorure de sodium	$\mu = 2,16 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Enthalpies standard de formation à 298 K	$\begin{cases} \Delta_f H^\circ(\text{Na}_{(\text{aq})}^+) = -240,12 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_f H^\circ(\text{Cl}_{(\text{aq})}^-) = -167,16 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_f H^\circ(\text{NaCl}_{(\text{s})}) = -411,18 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$
Masses molaires	$\begin{cases} M(\text{C}) = 12,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \\ M(\text{O}) = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \\ M(\text{Na}) = 23,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \\ M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_{\text{eau}} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse volumique de l'eau	$\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Prix du kilowattheure électrique TTC	0,20 €

Références

- [1] URL : <https://www.esthifrance.com/protection-inondation/flo-lift-h/>.
- [2] URL : <https://navi-discount.fr/114236-cartouche-de-gaz-33g-pour-gilet-105-165-n.html>.
- [3] URL : <https://www.protecthoms.com/pastille-sel-gilet-sauvetage-pilot.html>.

◇ Fin ◇



Ne rien écrire

dans la partie barrée

DR P087 - 24 mars 2026 - 15 :06

